

Eine Lernspur durch den Zahlenraum 10

Eine ausführliche Unterrichtsdokumentation aus einer 1. Schulstufe
zur Erarbeitung der Grundaufgaben im Zahlenraum 10

Dipl. Päd. Regina Zeindl-Steiner, MA

Mautern 2012

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis.....	1
Abbildungsverzeichnis.....	3
Einleitung.....	4
1 Was ist mathematisches Wissen?	5
1.1 Logisch-mathematisches Wissen	5
1.2 Konzeptuelles und prozedurales Wissen	7
1.3 Verstandenes und assoziativ auswendiggelerntes Wissen	9
1.4 Informelles und formelles Wissen	9
1.5 Resümee	10
2 Rechenfertigkeit im Zahlenraum 10 durch	11
„vergleichendes Rechnen“	11
2.1 Die Erarbeitung der Grundaufgaben im Zahlenraum 10	11
2.1.1 Eins oder zwei mehr	16
2.1.1.1 Unterrichtseinheit – „Numerische Stangen“ (Montessori – Material, Mathematik).....	16
2.1.1.2 Unterrichtseinheit mit Zähldingen	17
2.1.1.3 Unterrichtseinheit – Zahldarstellungen am Zehnerfeld	17
2.1.1.4 Unterrichtseinheit – Einführung des Pluszeichens	17
2.1.1.5 Unterrichtseinheit – Erarbeitung des Ist-Gleich-Zeichens	18
2.1.1.6 Unterrichtseinheit – Tauschaufgabe	19
2.1.1.7 Unterrichtseinheit – Zwei mehr	20
2.1.2 Eins oder zwei weniger	20
2.1.2.1 Unterrichtseinheit – Einführung des Minuszeichens	20
2.1.2.2 Unterrichtseinheit – Arbeit mit den Zahldarstellungen am Zehnerfeld	21
2.1.2.3 Unterrichtseinheit – Übungen zu „eins weniger“, „zwei weniger“	21
2.1.2.4 Unterrichtseinheit – Rechnungen finden	23
2.1.3 Addieren/Subtrahieren der Null	24
2.1.4 Verdoppeln und Halbieren	25
2.1.4.1 Unterrichtseinheit – Entdeckungen mit dem Spiegel	25
2.1.4.3 Unterrichtseinheit – Verschriftlichung im Heft	27
2.1.4.4 Unterrichtseinheit – Legen von Verdoppelungen am Zwanzigerfeld	28
2.1.4.5 Unterrichtseinheit – Rechensätzchen – Verdoppelungen	31
2.1.4.6 Unterrichtseinheit – Weiterführung der Verdoppelungen	32
2.1.4.7 Unterrichtseinheit – Halbieren	33
2.1.4.8 Unterrichtseinheit – Umkehraufgaben zu den Verdoppelungen	34
2.1.4.9 Unterrichtseinheit – Nachbaraufgaben zu den Verdoppelungen	35

2.1.4.10 Unterrichtseinheit – Nachbaraufgaben zu den Halbierungen	37
2.1.5 Fünf und etwas dazu	38
2.1.6 Das Teile-Ganzes-Konzept	41
2.1.7 Zahlenzerlegen durch Einsicht in die Zerlegungs-Handlung	44
2.1.7.1 Unterrichtseinheit – Zahlenzerlegungen an der Kugelmkette	45
2.1.7.2 Unterrichtseinheit – Operatives Üben mit den Zahlenzerlegungen	47
2.1.8 Zehnersummen	47
2.1.8.1 Unterrichtseinheit – Die Zahlen an der Fünf und an der Zehn verankern	47
2.1.8.2 Unterrichtseinheit – Zehnersummen	48
2.2 Möglichkeiten zur Übung und Automatisierung der Aufgaben im Zahlenraum bis 10	49
2.2.1 Gezieltes „Automatisieren“ mithilfe einer Lernkartei	49
2.2.2 Training der Auswahl von Rechenstrategien	50
2.2.2.1 Übung der Strategie – Auswahl beim kleinen Einspluseins	51
2.2.2.2 Übung der Strategie – Auswahl beim kleinen Einsminuseins	52
2.2.3 Die Arbeit mit der Einspluseins – Tafel	53
2.2.3.1 Unterrichtseinheit – Orientierungsübungen an der Plus -Tafel	53
2.2.3.2 Unterrichtseinheit – „Päckchen mit Pfiff“	53
2.2.3.3 Unterrichtseinheit – Ungeordnete Aufgabenserien	54
2.2.3.4 Unterrichtseinheit – Aktivitäten mit Arbeitsblättern	55
2.2.3.5 Unterrichtseinheit – Die Einspluseins - Tafel als Aufgabendisplay	56
2.2.3.6 Unterrichtseinheit – Zahlenzerlegungen zu Zahlen bis 10	56
2.2.3.7 Unterrichtseinheit – Übungsaufgaben zum Einspluseins erfinden und austauschen	57
2.2.3.8 Unterrichtseinheit – Rechenfamilien im Einspluseins	58
3. Schlussbemerkung	59
4. Literaturverzeichnis	62
Anhang	64

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Zehnersystemblöcke	6
Abbildung 2: 7 Finger, 7 Blätter, Punktebild der 7.....	7
Abbildung 3: Zyklus der Wochentage, Punktebilder der 7 auf dem Zehnerfeld.....	7
Abbildung 4: Übersicht über die Grundaufgaben im Zahlenraum 10.....	12
Abbildung 5: Einspluseins-Tafel	13
Abbildung 6: Beschreibung "Numerische Stangen"	16
Abbildung 7: Zahldarstellung - Karten für die Hand der Kinder	17
Abbildung 8: Grafische Darstellung - Plusaufgabe	19
Abbildung 9: Grafische Darstellung - Tauschaufgabe	19
Abbildung 10: Darstellung der Zahlen 1 bis 10 auf dem Zehnerfeld.....	21
Abbildung 11: Abdeckfläche für Minusaufgaben.....	21
Abbildung 12: Zwei-weniger-Maschine	22
Abbildung 13: Tafelbild - Rechnungen finden	23
Abbildung 14: Schülerdokument 1	23
Abbildung 15: Schülerdokument 2	24
Abbildung 16: Spindelkasten.....	24
Abbildung 17 a/b/c: Kinder machen Entdeckungen mit dem Spiegel 1	25
Abbildung 18: Entdeckungen mit dem Spiegel 2	26
Abbildung 19 a/b/c: Spiegelungen von Darstellungen	26
Abbildung 20: Verdoppelung mit dem Spiegel	27
Abbildung 21 a/b/c: Spiegeln von Wendepfättchen.....	27
Abbildung 22 a/b: Bildliche Darstellung von Spiegelungen.....	27
Abbildung 23: Verschiedene Verdoppelungen am Zwanzigerfeld 1	28
Abbildung 24: Verschiedene Verdoppelungen am Zwanzigerfeld 2	29
Abbildung 25: Darstellung der Verdoppelung durch anschauliches Legen	30
Abbildung 26: Verdoppelungen im Zahlenraum bis 20	30
Abbildung 27: Beispiele für Nachbargaufgaben.....	31
Abbildung 28: Benachbarte Felder von 4+4.....	32
Abbildung 29: Legebild 4+4 am Zwanzigerfeld.....	35
Abbildung 30: Nachbargaufgaben zu den Verdoppelungen	36
Abbildung 31: Tafelbild – Nachbargaufgaben1	36
Abbildung 32 a/b/c: Nachbargaufgaben zu den Verdoppelungen an der Einspluseins-Tafel	37
Abbildung 33: Tafelbild mit Nachbargaufgaben 2	37
Abbildung 34: Inneres Fingerbild - Verdecktes Ausstrecken von acht Finger	38
Abbildung 35: Rechenaufgaben zum Fingerbild von 7	39
Abbildung 36: Zahldarstellungen am Zehnerfeld	39
Abbildung 37: Schülerdokument zur Zahldarstellung von 8.....	40
Abbildung 38: Arbeitskarte zum Teile-Ganzes-Konzept 1	41
Abbildung 39: Arbeitskarte Teile-Ganzes-Konzept 2	42
Abbildung 40: Arbeitskarte Teile-Ganzes-Konzept 3	43
Abbildung 41: Arbeitskarte Teile-Ganzes-Konzept 4	44
Abbildung 42: Zahlenzerlegungen an der Kugelskette 1	45
Abbildung 43: Zahlenzerlegungen an der Kugelskette 2	45
Abbildung 44: Additives Zerlegen.....	46
Abbildung 45: Schülerdokument - Aufgaben zu Zahlenzerlegungen.....	47
Abbildung 46: Zehnersummen am Zehnerfeld.....	48
Abbildung 47: Lernkartei	50
Abbildung 48: Strategieauswahl bei kleinen Einspluseins-Aufgaben	51
Abbildung 49: Strategieauswahl bei kleinen Einsminuseins-Aufgaben	52
Abbildung 50: Aufgaben für Päckchen mit Pfiff.....	54
Abbildung 51: Ungeordnete Aufgabenserie	54
Abbildung 52: Geordnete Aufgabenserie	55
Abbildung 53: Auszug aus der Einspluseins-Tafel.....	55
Abbildung 54: Wege in der Einspluseinstafel.....	57
Abbildung 55: Schülerdokument zu Rechenfamilien.....	59

Einleitung

Die Erarbeitung der Grundaufgaben im Zahlenraum 10 bzw. 20 stellt einen Kernbereich des Lehrplans der 1. Schulstufe in der Grundschule dar. Die vorliegende ausführliche Unterrichtsdokumentation über die Erarbeitung dieser Grundaufgaben berücksichtigt nicht die Jahresplanungen der aktuellen Schulbücher für den Mathematikunterricht in der 1. Schulstufe. Sie gründet sich vornehmlich auf die Unterlagen der Ausbildung zur Lernberaterin / zum Lernberater Mathematik und nützt verschiedene Fachliteratur zum Thema.

Das 1. Kapitel widmet sich dem Thema „Was ist mathematisches Wissen?“ und stellt unterschiedliche Begriffe und Aussagen zum mathematischen Wissen gegenüber. Das 2. Kapitel geht auf das Kernthema „Rechenfertigkeit im Zahlenraum 10 durch vergleichendes Rechnen“ ein und zeigt die Erarbeitung der Grundaufgaben im Zahlenraum 10, Möglichkeiten zur Übung und Automatisierung des Rechnens in diesem Zahlenraum sowie die Arbeit mit der Einpluseins-Tafel. Die kleinsten Gliederungsebenen bilden die unterschiedlichen Unterrichtseinheiten zu mathematischen Inhalten. Diese konkret dargestellten Unterrichtseinheiten gehen aus einem Mitschnitt einer 1. Schulstufe hervor und berücksichtigen aktuelle methodische und didaktische Zugänge. Die beschriebenen Unterrichtseinheiten umfassen in etwa 20 Schulwochen. Im Kapitel „Schlussbemerkung“ stehen der Umgang mit dem Fehler und das Finden von eigenen Lösungswegen im Mittelpunkt. Im Anhang befinden sich Arbeitsblätter, die den jeweiligen mathematischen Inhalten zuzuordnen sind.

1 Was ist mathematisches Wissen?

Aussagen zum mathematischen Wissen gestalten sich unterschiedlich. Was ist mit Aussagen wie „das Kind kann rechnen“, „es versteht Mathematik“ oder „das Kind kann nicht rechnen“ sowie „es versteht Mathematik nicht“ gemeint. Die Auseinandersetzung mit Lernschwierigkeiten und Lernschwächen beruht auf der Grundlage von Theorien beziehungsweise auf Modellvorstellungen vom Lernen und Verstehen¹. GERSTER und SCHULTZ² stützen sich dabei auf amerikanische und deutschsprachige Autoren und verweisen auf Begriffe wie „Logisch-mathematisches Wissen“, „Konzeptuelles und prozedurales Wissen“, „Verstandenes und assoziativ auswendiggelerntes Wissen“ und „Informelles und formelles Wissen“.

1.1 Logisch-mathematisches Wissen

Abhängig vom Ursprung des Wissens unterschied Piaget drei Arten des Wissens: physikalisches, konventionelles und logisch-mathematisches Wissen³.

Physikalisches Wissen

Konzepte von Gegenständen, Farben, Tönen, Gerüchen sind Beispiele für physikalisches Wissen. Diese Konzepte werden im Laufe der Zeit aus vielen Erfahrungen in der konkreten Auseinandersetzung konstruiert. So ist es möglich, im Geist beispielsweise das Konzept (den Begriff) „Schuh“ oder die Farbkategorie „rot“ präsent zu haben⁴.

Konventionelles Wissen

Das konventionelle Wissen hat ihren Ursprung in sozialen Übereinkommen (Konventionen), die von Menschen festgelegt und weitergegeben werden. Beispiele dafür sind die Bezeichnungen für Zahlen: 1, 2, 3, werden eben „eins“, „zwei“, „drei“ genannt. Auch die Schreibweise „25“ für die Zahl fünfundzwanzig ist konventionelles Wissen⁵.

¹ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 27

² Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 27-34

³ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 27

⁴ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 27-28

⁵ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 28

Logisch-mathematisches Wissen

Logisch-mathematisches Wissen wurzelt in geistiger Aktivität, welche Beziehungen zwischen Objekten oder Tätigkeiten herstellt. Wenn man rote und blaue Zählchips betrachtet, so denkt man, der rote und der blaue Chip sind verschieden. Somit hat man im Geist eine Beziehung hergestellt zwischen den roten und den blauen Chips, die weder in den roten noch in den blauen Chips vorhanden ist. Beziehungen existieren nicht im konkreten Material⁶.

Die beschriebenen Unterscheidungen der drei Arten von Wissen sind wichtig, wenn festgelegt wird, was ein Schüler über eine Sache weiß oder wissen sollte. So können am Beispiel der Zehnersystem-Blöcke die drei Arten von Wissen folgendermaßen dargestellt werden:

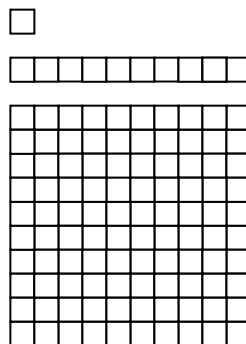


Abbildung 1: Zehnersystemblöcke

Das *physikalische Wissen* über die Zehnersystemblöcke betrifft das Wissen über Material - sie sind aus Holz - naturfarben – gekerbt. Dieses Wissen kann durch Beobachten erworben werden. Es kann über dieselben Objekte auch *konventionelles Wissen* erworben werden: dies ist ein „Einerwürfel“, das heißt „Zehnerstange“ und das wird „Hunderterplatte“ genannt. Konventionelles Wissen wird von anderen Menschen mitgeteilt. *Logisch-mathematisches Wissen* hingegen gründet auf Beziehungen, die nicht wahrnehmbar sind. Die Beziehungen im Material müssen mental konstruiert werden. Ein Kind kann auf die Würfel, die Stangen, die Platten blicken und damit hantieren, ohne die Beziehung „eine Zehnerstange ist gleichviel wie zehn Einerwürfel“ zu konstruieren. Die

⁶ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 28

Beziehung zwischen den Objekten muss letztlich selber durch eigene Verstandesaktivität hergestellt werden. Das Kind lernt erst ganz allmählich „sehen“. Dies kann durch Gespräche angeregt und erleichtert werden⁷.

1.2 Konzeptuelles und prozedurales Wissen

Konzeptuelles Wissen

Konzeptuelles Wissen ist reich an *Beziehungen*. Konzeptuelles Wissen wird erworben, indem eine neue Information (etwa $6 + 7 = 13$) mit bereits bekannter Information ($6 + 6 = 12$) in Verbindung gebracht wird. Es entsteht Einsicht und Verständnis.

„So umfasst ein entwickeltes *Konzept der Zahl Sieben* vielfältige Beziehungen:

- Sieben ist das letzte Zählwort in der Zählreihe von 1 bis 7 und zugleich die Anzahl der Zählwörter von eins bis sieben
- Sieben ist die Anzahl der gestreckten Finger
- Sieben ist die Anzahl der Zählplättchen
- Sieben ist die Anzahl der Wochentage
- Sieben ist die Anzahl der Punkte auf dem Zehnerfeld“⁸



Abbildung 2: 7 Finger, 7 Blätter, Punktebild der 7⁹

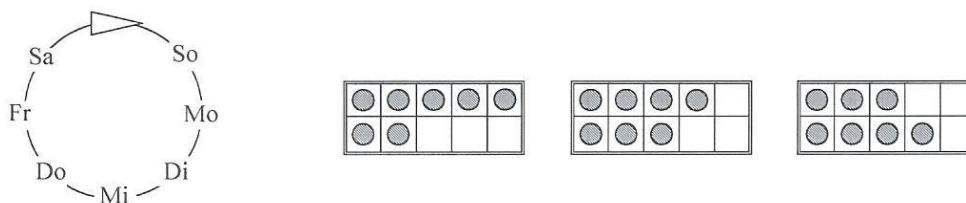


Abbildung 3: Zyklus der Wochentage, Punktebilder der 7 auf dem Zehnerfeld¹⁰

⁷ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 28-29

⁸ GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 30

⁹ GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 30

¹⁰ GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 30

GERSTER und SCHULTZ¹¹ verweisen vor allem auf die Punkte im Zehnerfeld, die die vielfältigen Beziehungen der Zahl Sieben deutlich darstellen:

- 7 ist eins mehr als 6, 7 ist eins weniger als 8
- 7 ist zwei mehr als 5, 7 ist drei weniger als 10
- 7 ist das Gleiche wie vier plus drei
- 7 ist eins mehr als das Doppelte von 3

Aus diesen Beziehungen lassen sich folgende Aufgaben herausarbeiten¹²:

$$\boxed{7 = 6 + 1} \quad \boxed{7 = 5 + 2} \quad \boxed{7 = 10 - 3} \quad \boxed{7 + 3 = 10} \quad \boxed{7 = 4 + 3} \quad \boxed{7 = 3 + 3 + 1}$$

Das Verständnis für den *Zahlbegriff der Sieben* entwickelt sich durch die Herstellung der vielfältigen Beziehungen und zwar

- zu konkreten Handlungen (zu 6 Plättchen noch eines dazulegen),
- zu Situationen der realen Welt (7 Finger, 7 Blätter, 7 Wochentage),
- zu didaktischen Modellen (7 Plättchen auf dem Zehnerfeld),
- zu bildlichen Vorstellungen (7 Punkte auf dem Zehnerfeld),
- zur Zahlwortreihe (das siebte Zahlwort, die Menge der Zahlwörter von 1 bis 7),
- zu geschriebenen Symbolen wie Ziffern, Summen und Differenzen.

Das geschriebene Symbol „7“ sollte alle diese Bedeutungen re – präsentieren¹³.

Prozedurales Wissen

Prozedurales Wissen beinhaltet die Kenntnis von geschriebenen Symbolen wie „7“, den Rechensymbolen sowie den Regeln, wie diese zu handhaben sind. Wichtiger Bestandteil prozeduralen Wissens sind Schritt-für-Schritt-Vorschriften, die von einer Aufgabe zur Lösung führen. Die vier schriftlichen Rechenverfahren gehören beispielsweise zum prozeduralen Wissen. Ebenso gehört zum prozeduralen Wissen das Operieren mit konkretem Material und bildlichen Darstellungen, die nicht Standardsymbole der

¹¹ 2004, S. 30-31

¹² Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 30

¹³ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 31

Mathematik sind. Dazu gehört zum Beispiel das Lösen von mündlich gestellten Additions- und Subtraktionsaufgaben durch Zählstrategien¹⁴.

1.3 Verstandenes und assoziativ auswendiggelerntes Wissen

Viele Kinder lernen das Rechnen als „eine Welt für sich“. Der Sinn neuer Prozeduren wird nicht erkannt. Daher werden Fakten, Regeln und Tricks für das Lösen von Aufgaben *auswendig gelernt*. Alltagserfahrungen und Nutzen für reale Probleme bleiben außerhalb. Sie leben in der Vorstellung, eine feste Methode oder Formel könnte als Ersatz für Denken genutzt werden. Im Gegensatz dazu steht das Verständnis, das keinesfalls dem Alles-oder-Nichts-Phänomen folgt. Ein Kind hat ein mathematisches Konzept oder eine mathematische Prozedur „*verstanden*“, wenn es Verbindungen hergestellt hat zu bereits in seinem Geist existierenden Ideen. Je zahlreicher und stärker die Verbindungen sind, umso besser hat es verstanden. Ein mathematisches Konzept wie eine Zahl (z. B. 7) verstehen lernen heißt, ein reichhaltiges Geflecht von Beziehungen herzustellen zwischen verschiedenen Darstellungen, Vorstellungen und Anwendungssituationen sowie das auch im Langzeitgedächtnis zu speichern¹⁵.

1.4 Informelles und formelles Wissen

Informelles Wissen von Schülern (Wissen, das Schüler vor oder außerhalb der Schule in Alltagssituationen selbständig erworben haben) und *formelles Wissen* (in der Schule erworben, zumeist Wissen über geschriebene Symbole und Prozeduren) können oft nicht miteinander in Verbindung gebracht werden und bleiben so voneinander isoliert. Somit ist formelles Wissen sehr fehleranfällig, da es nicht an das praktische Wissen gekoppelt ist. Kinder vertrauen meist den Symbolmanipulationen mehr als ihren eigenen Erfahrungen, die auf informellem Wissen beruhen, auch wenn Aufgaben im Alltagskontext gestellt werden. Beispiele aus Verkaufssituationen werden durch schrittweises Ergänzen fehlerfrei gelöst und stellen somit bei der Ermittlung des Retourgeldes kein Problem dar. Hingegen

¹⁴ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 31

¹⁵ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 32-33

führt die schriftliche Lösung der gleichen Aufgabe durch den Algorithmus der Subtraktion häufig zu Schwierigkeiten¹⁶.

1.5 Resümee

Die Auseinandersetzung mit den verschiedenen Arten und Begriffen zum mathematischen Wissen bildet eine wesentliche Grundlage für die Gestaltung des Mathematikunterrichtes und fordert Konsequenzen für den Umgang mit mathematischen Inhalten. So bildet sich beispielsweise durch die Arbeit mit strukturierten mathematischen Anschauungsmaterialien nicht nur physikalisches und konventionelles Wissen sondern im Besonderen die geistige Aktivität in der Beziehungen hergestellt werden, die nicht im konkreten Material existieren sondern gesehen werden müssen: „Wann sieht nur, was man weiß.“ Das konzeptuelle Wissen, das ebenfalls auf den Beziehungen gründet, steht dem prozeduralen Wissen gegenüber, das die Kenntnis von geschriebenen Symbolen sowie Rechenregeln und Schritt-für-Schritt-Vorschriften impliziert. Ebenso geht es beim dem Begriff „Verstandenes Wissen“ um Beziehungen, die mit bereits bestehendem mathematischen Konzepten in Verbindung gebracht werden. Assoziativ auswendiggelerntes Wissen fungiert bei manchen Kindern als Ersatz für das Denken und lässt das Rechnen isoliert vom Alltag stehen. Die Einbeziehung des informellen Wissens in den Mathematikunterricht gibt Sicherheit bei der Suche nach Lösungswegen, die auch von formellem Wissen begleitet werden.

Der Lehrplan der Volksschule verweist unter dem Punkt der Bildungs- und Lehraufgabe darauf, dass „der Mathematikunterricht dem Schüler die Möglichkeiten geben soll, schöpferisch tätig zu sein, rationale Denkprozesse anzubahnen, die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren und grundlegende mathematische Techniken zu erwerben.“¹⁷ Das folgende Kapitel widmet sich im Rahmen des Verstehens von Operationsstrukturen und Rechenoperationen im additiven Bereich der Rechenfertigkeit im Zahlenraum 10 durch „vergleichendes Rechnen“.

¹⁶ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 2004, S. 33-34

¹⁷ LEHRPLAN DER VOLKSSCHULE 2005, S.144

2 Rechenfertigkeit im Zahlenraum 10 durch „vergleichendes Rechnen“

Dieses Kapitel widmet sich der Ausbildung der Rechenfertigkeit im Zahlenraum 10 durch „vergleichendes Rechnen“. Dabei wird die Erarbeitung der Grundaufgaben im Zahlenraum 10 nach mathematischen Zielen gegliedert und der Verlauf nach aufeinanderfolgenden Unterrichtseinheiten strukturiert. In einem weiteren Teil werden dann Möglichkeiten zur Übung und Automatisierung der Aufgaben im Zahlenraum bis 10 ebenso detailliert beschrieben.

2.1 Die Erarbeitung der Grundaufgaben im Zahlenraum 10

Bei der Erarbeitung der Grundaufgaben wird das Ziel verfolgt, die Kinder zum „vergleichenden Rechnen“ zu befähigen und das Zählen dadurch für sie überflüssig zu machen. Dem „vergleichenden Rechnen“ steht das „zählende Rechnen“ gegenüber. Beim „zählenden Rechnen“ werden Plus- und Minusaufgaben dahingehend gelöst, als in Einer-Schritten in der Zahlenreihe rauf und runter gezählt wird¹⁸. Das „vergleichende Rechnen“ nützt Beziehungen der Aufgaben zueinander und macht dadurch das Zählen überflüssig. Hat sich ein Kind die Aufgabe $4 + 4 = 8$ bereits gemerkt, so kann die Lösung für die Aufgabe $4 + 3$ durch vergleichendes Rechnen gefunden werden¹⁹.

Ein geordnetes Vorgehen ist auf Grundlage der Übersicht von GAIDOSCHIK²⁰ gut möglich und beachtet die sehr unterschiedlichen Schwierigkeiten der „Grundaufgaben“ im Zahlenraum 10.

Addition				
plus 1 → plus 2	„Pärchen“ → Nachbarn der „Pärchen“	restliche Plusaufgaben		
z. B.				
$6 + 1$	$4 + 4$	$4 + 5$	$5 + 3$	über $5 + 2$ oder „Fingerbild“
$1 + 8$ (!)	$5 + 5$	$5 + 6$	$6 + 3$	über $6 + 2$ oder $5 + 3$
$7 + 1$	$3 + 3$	$3 + 4$	$7 + 3$	eventuell über $7 + 2$
$6 + 2$			$6 + 4$	eventuell über $5 + 5$
$2 + 8$ (!)				
$7 + 2$				

¹⁸ Vgl. GAIDOSCHIK 2003, S. 32

¹⁹ Vgl. GAIDOSCHIK 2003, S. 75

²⁰ 2003, S. 77-78

Additives Zerlegen

„Hand-Zerlegungen“	Nachbarn der „Hand-Zerlegungen“	Zerlegungen mit 1	Zerlegungen mit 2
z. B. $8 = 5 + 3$ $7 = 5 + 2$	$8 = 6 + 2$ / $8 = 4 + 4$ $7 = 6 + 1$ / $7 = 4 + 3$	$8 = 1 + 7$ / $7 + 1$ $7 = 1 + 6$ / $6 + 1$	$8 = 2 + 6$ / $6 + 2$ $7 = 2 + 5$ / $5 + 2$

Die einzige so nicht erfasste Zerlegung: $6 = 3 + 3$; ihre Erarbeitung über $3 + 3 = 6$ bietet sich an.

Subtraktion

minus 1 → minus 2	„eine Hand → Nachbarn von wegnehmen“ „eine Hand weg“	Unterschied 1 → Unterschied 2
z. B. $5 - 1$ $5 - 2$ $7 - 1$ $7 - 2$	$8 - 5$ $7 - 5$	$8 - 6$ $7 - 4$

Die einzigen so nicht erfassten Subtraktionen:

$6 - 3$ über $3 + 3 = 6$
 $10 - 3$ eventuell über $10 - 2$
 $10 - 7$ etwa über $10 - 6$ oder über den Zusammenhang mit $10 - 3$

Abbildung 4: Übersicht über die Grundaufgaben im Zahlenraum 10²¹

Die folgende Unterrichtsplanung richtet sich nach obiger Übersicht aus. Für die Hand der Kinder wird die „Einspluseins-Tafel“ nach WITTMANN und MÜLLER gewählt. Dabei handelt es sich um ein Rechenposter, auf dem die Aufgaben im Zahlenraum 20 eingetragen sind.

²¹ GAIDOSCHIK 2003, S. 77-78

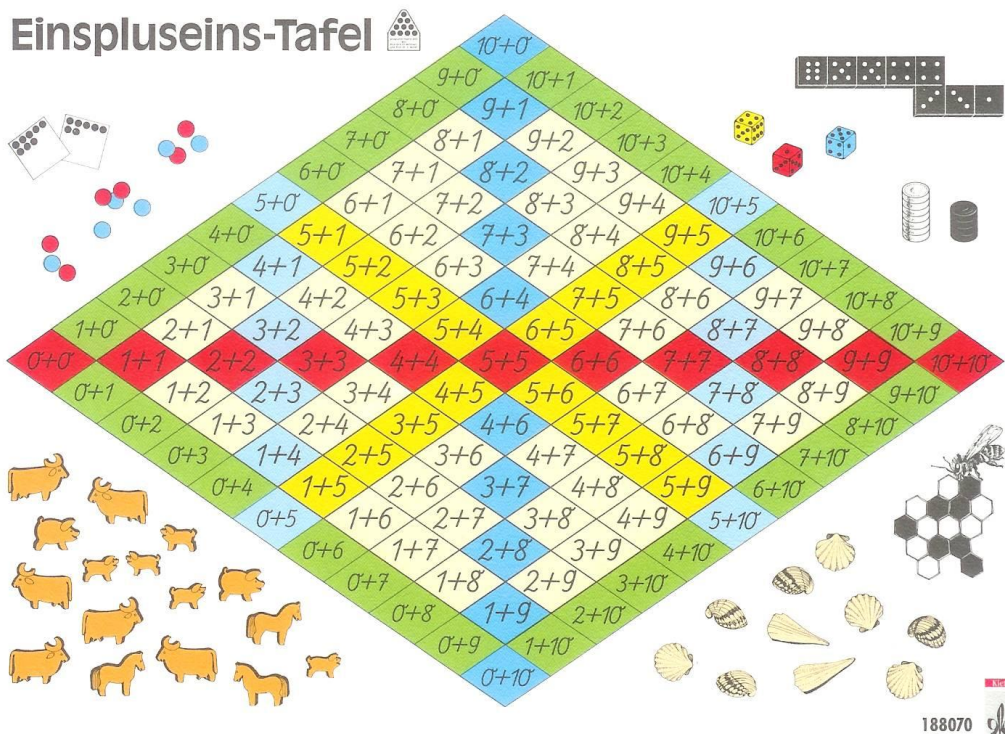


Abbildung 5: Einspluseins-Tafel²²

Aufbau der Einspluseinstafel²³:

- Die Ergebnisse der Aufgaben werden **in Leserichtung** von links nach rechts größer.
Untereinander stehende Aufgaben haben stets das **gleiche Ergebnis**.
- Die für die Schüler **schwierigeren Aufgabenserien** (beide Summanden ändern sich) sind in den **Hauptrichtungen** von links nach rechts und von oben nach unten angeordnet.
- Die für die Schüler **leichteren Aufgabenserien** (nur ein Summand ändert sich) stehen in den etwas ungewohnten **Diagonalen**.

²² WITTMANN & MÜLLER 1994, Deckblatt

²³ Vgl. WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 44-45

Dadurch wird der operative Zusammenhang zwischen den 121 Aufgaben des „1 + 1“ in den Vordergrund gerückt.

Durch Farbgebung wird die Tafel übersichtlich strukturiert. Die wichtigste Aufgabe **5 + 5** befindet sich genau in der Mitte. Dort treffen sich verschiedene Aufgabenserien, die für das Erlernen des Einspluseins besonders wichtig sind. In der traditionellen Rechendidaktik werden sie als Kernaufgaben bezeichnet:

Die mittlere (rot markierte) Zeile besteht aus den **Verdoppelungsaufgaben:**
0+0, 1+1, 2+2, 3+3, 4+4, 5+5, 6+6, 7+7, 8+8, 9+9, 10+10.

Die beiden (gelb markierten) Diagonalen bestehen aus **Plusaufgaben mit 5 (Kraft der Fünf!)**

5+1, 5+2, 5+3, 5+4, 5+5, 5+6, 5+7, 5+8, 5+9,
1+5, 2+5, 3+5, 4+5, 5+5, 6+5, 7+5, 8+5, 9+5.

Die mittlere (dunkelblau markierte) Spalte besteht aus Aufgaben zur **Zehnerergänzung:**

10+0, 9+1, 8+2, 7+3, 6+4, 5+5, 4+6, 3+7, 2+8, 1+9, 0+10.

Die linke und rechte (hellblau markierte) Spalte bestehen aus Aufgaben zur **Fünfer- bzw. Fünfzehnerergänzung:**

5+0, 4+1, 3+2, 2+3, 1+4, 0+5 bzw.
10+5, 9+6, 8+7, 7+8, 6+9, 5+10.

Diese Aufgaben sind keine klassischen Kernaufgaben. Sie unterstützen jedoch das Rechnen mit der so genannten „Kraft der Fünf“.

Die grün markierten **Randaufgaben** (Plusaufgaben mit 0 oder 10) sind ganz einfach und müssen nicht gesondert gelernt werden. Das Gleiche gilt für Plusaufgaben mit 1. Beachtet man das Vertauschungsgesetz und lässt die einfachen Randaufgaben sowie die einfache Aufgabe 1+1 weg, so müssen nur 20 Kernaufgaben und 4 Aufgaben zur Fünfer- (Fünfzehner-)ergänzung erlernt werden.

So entwickelt sich eine gute Übersicht über all jene Aufgaben, die schon gut gelöst werden können. Nach jedem Erarbeitungsblock werden die nächsten Aufgaben in die Tafel übertragen. Nachdem eine Struktur erkennbar ist, werden auch bestimmte Aufgabengruppen in den passenden Farben eingefärbt.

15

2.1.1 Eins oder zwei mehr

Es ist eine Sache, von einer Zahl um eins oder zwei weiterzuzählen und es ist eine andere Sache, die Beziehung „eins mehr“ bzw. „zwei mehr“ zu erkennen und die Zahl, die um eins größer ist, sofort nennen zu können²⁴.

2.1.1.1 Unterrichtseinheit – „Numerische Stangen“ (Montessori – Material, Mathematik)



Abbildung 6: Beschreibung "Numerische Stangen"²⁵

Die „Numerischen Stangen“ können bereits beim Erwerb der Zahlbegriffe von 1 bis 10 Verwendung finden. Dieses Material berücksichtigt den Begriff der „gebundenen Menge“ und „das Maß der Veränderung um 1“.

Darbietung und Übungen:

- Alle Stangen liegen ungeordnet auf dem Teppich. Die Kinder legen sie in der obigen Ordnung hin.
- Die Kinder ordnen die passenden Ziffernkärtchen zu.
- Der 1er Stab passt genau in die entstanden Stufen – Veränderung ist immer 1. Jedes Kind führt diese Handlung durch von 2 bis 10.
- Zählübungen von der kleinsten zur größten Einheit und umgekehrt.

²⁴ Vgl. GAIDOSCHIK 2005

²⁵ WOLF Montessori-Katalog

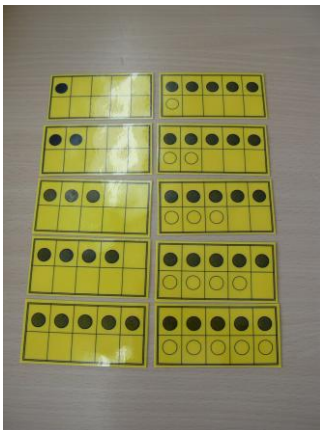
- Lehrer fordert die Kinder auf:
 - Gib mir bitte die Stange 3, 8,.... wieder zurücklegen lassen.
 - Gib mir bitte die Stange, die 1 mehr als 7 ist!
 - Gib mir bitte die Stange, die 2 mehr als 3 ist!

2.1.1.2 Unterrichtseinheit mit Zähl dingen

Die Lehrerin oder der Lehrer gibt eine Menge vor, die von einem Kind in einen „Zählsack“ gezählt wird. Der Sack wird verschlossen und die Anzahl wird noch einmal mündlich wiederholt. Ein weiteres Kind bekommt den Auftrag, 1 dazuzulegen. Wie viele sind es jetzt? Die Kinder nennen die neue Menge, wobei Wert auf den Ausdruck „1 mehr“ zu legen ist²⁶.

2.1.1.3 Unterrichtseinheit – Zahldarstellungen am Zehnerfeld

Jedes Kind besitzt 10 Kärtchen mit den Zahldarstellungen von 1 bis 10.



Eine Zahldarstellung wird gewählt und die Kinder legen jeweils 1 mit einem roten oder blauen Plättchen dazu.

Die Kinder werden wieder zur richtigen Sprechweise geführt: „Wenn man zu 3 eines dazu gibt, erhält man 4.“

Abbildung 7: Zahldarstellung - Karten für die Hand der Kinder

2.1.1.4 Unterrichtseinheit – Einführung des Pluszeichens

Ausgangssituation bilden wieder die Zahldarstellungen von 1 bis 10. Ein „Befehlskärtchen“²⁷ aus Papier mit

²⁶ Vgl. GAIDOSCHIK 2005

²⁷ GAIDOSCHIK 2005

$$\boxed{+ 1}$$

ist bereitgelegt. Zuerst wird eine Zahldarstellung gewählt (z.B. 7), dann wird das Befehlskärtchen $\boxed{+ 1}$ vom Lehrer gezeigt und die Kinder legen den Rechenbefehl mit Plättchen dazu.

Die Zahldarstellung des ersten Terms mit den Zehnerfeldkärtchen ist deshalb vorteilhafter, weil

- die Kinder nicht wieder zum Zählen verlockt werden,
- die Menge im Gesamten vorhanden ist und einzelne Plättchen leichter verrutschen würden,
- die Zufüghandlung „+ 1“ durch das hinzugefügte blaue/rote Plättchen deutlich wird,
- die Gesamtzahl auf dem Zehnerfeld unmittelbar, ohne zu zählen, erkannt werden kann (durch die Beziehung zur 5 und zur 10).

Ein Nachteil dieser Erarbeitung könnte darin liegen, dass die Bedeutung des Summenterms als eine Gesamtanzahl, die sich aus zwei Anzahlen zusammensetzt im Hintergrund bleibt. Rückblickend kann aber gesagt werden, dass die Schülerinnen und Schüler in den Folgeeinheiten immer wieder auf das Teile-Ganzes-Konzept hingelenkt werden, sodass ihnen daraus keine falsche Einsicht entsteht. Sie bleiben nicht an der Deutung von Rechentermen als Handlungsanweisungen ($7 + 1 = 8$ im Sinne des Operatorkonzeptes als „7 und 1 dazu ergibt 8“) hängen. In dieser Unterrichtseinheit liegt das Gewicht darauf, die mathematische Symbolschrift für „Gib`1 dazu“ zu erarbeiten.

2.1.1.5 Unterrichtseinheit – Erarbeitung des Ist-Gleich-Zeichens

Es gilt folgende Ausgangssituation: Die Kinder legen Aufgaben mit Hilfe der Rechenbefehlskarte $\boxed{+ 1}$. Die Kinder erhalten folgenden Arbeitsauftrag: Wie können diese Aufgaben, die auch immer wieder verbalisiert werden, in eine schriftliche Form gebracht werden? Die Kinder suchen eine schriftliche Form für die Aussage: „Zuerst sind 7 da. Dann gebe ich 1 dazu. Dann sind es insgesamt 8.“ Schritt für Schritt wird mitgeschrieben: $7 + 1 =$ (dazu spricht die Lehrerin „sind insgesamt“) 8. Somit ist das neue Symbol geboren. Manche Kinder werden es schon von älteren Geschwistern kennen. Im Anschluss werden einige dieser Additionshandlungen in Symbolschrift übersetzt. Es entstehen Rechenaufgaben wie $\boxed{8 + 1 = 9}$ $\boxed{5 + 1 = 6}$ $\boxed{4 + 1 = 5}$. In einer weiteren Einheit werden diese Kärtchen dann im Sinne „schöner Päckchen“ geordnet und in der Einspluseins-Tafel gesucht und eingefärbt.

2.1.1.6 Unterrichtseinheit – Tauschaufgabe

Die Kinder legen auf einem Pappteller die Rechenaufgabe $3 + 1$. Diese Aufgabe kann aufgrund der Simultanerfassung leicht gelegt werden. Das Legen der Aufgabe erfolgt unter dem Gesichtspunkt der guten Erkennbarkeit der beiden Mengen. Daher ist es vorteilhaft, dass die Kinder 2 Farben verwenden.

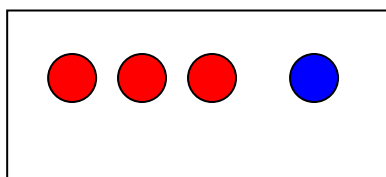


Abbildung 8: Grafische Darstellung - Plusaufgabe

Die Aufgabe wird von den Schülerinnen und Schülern unter Beachtung der Leserichtung von links nach rechts gelesen: $3 + 1 = 4$.

Anschließend wird die gelegte Aufgabe von den Kindern von der anderen Seite des Tisches betrachtet. Sie tauschen den Platz → Tauschaufgabe!

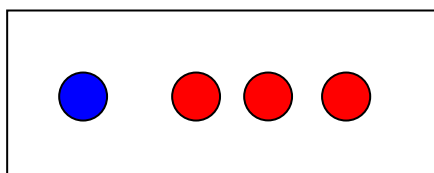


Abbildung 9: Grafische Darstellung - Tauschaufgabe

Nun kann die Aufgabe als $1 + 3 = 4$ gesehen werden. An der gesamten Menge hat sich jedoch nichts verändert. Einige Aufgaben dieser Art werden nun so gelegt und durch Platztausch gelöst²⁸. Im Anschluss arbeiten die Kinder mit Arbeitsblättern (siehe Anhang) zu diesem Thema.

²⁸ Vgl. GAIDOSCHIK 2005

2.1.1.7 Unterrichtseinheit – Zwei mehr

Durch Anfertigen eines $\boxed{+ 2}$ Befehlskärtchen werden die Schüler aufgefordert, einen weiteren Rechenbefehl auszuführen. Der weitere Verlauf der Einheiten erfolgt wie bei „Eins mehr“. Bei allen Rechenaufgaben wird der Bezug zu „eins mehr“ hergestellt: „ $3 + 1 = 4$ “ daher ist $3 + 2 = 5$ “.

GERSTER und SCHULTZ²⁹ verweisen in diesem Zusammenhang auf die Schüleraktivität:

Zwei-mehr-Blitzrechnen

Dabei wird ein Punktmuster nur etwa 1 bis 3 Sekunden lang gezeigt. Die Kinder sollen dann die Zahl sagen, die zwei mehr ist als die Anzahl der Punkte, welche sie sehen. Hierbei kann auch die Sprechweise „zwei mehr als 6 ist 8“ eingeübt werden.

Auch die tägliche Übung mit den passenden Automatisationskärtchen (von $\boxed{1 + 1}$ bis $\boxed{9 + 1}$ sowie $\boxed{1 + 2}$ bis $\boxed{8 + 2}$ inklusive Tauschaufgaben) bringt eine hohe Geläufigkeit bei diesen Aufgaben. Zur Unterstützung dieser Strategien dient auch ein Arbeitsblatt (siehe Anhang).

2.1.2 Eins oder zwei weniger

Um schon früh den Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion deutlich zu machen sowie mit Umkehraufgaben zu arbeiten, ist es notwendig, als nächsten Schritt die Einführung des Minuszeichens vorzunehmen.

2.1.2.1 Unterrichtseinheit – Einführung des Minuszeichens

Es folgen wieder Übungen mit dem „Zählsack“. Vorerst beginnt es mit mündlichen

Anweisungen: „Nimm 1 weg“. „Nimm 2 weg“. Dann werden die Befehlskärtchen $\boxed{- 1}$

$\boxed{- 2}$ eingeführt und verwendet.

²⁹ 1998, S. 343

2.1.2.2 Unterrichtseinheit – Arbeit mit den Zahldarstellungen am Zehnerfeld

Nachdem einige Rechenaufgaben mit den roten und blauen Wendepfättchen gelegt sind – hier war die Tätigkeit des Wegnehmens ganz deutlich erkennbar – kann zu den Zahldarstellungen am Zehnerfeld gewechselt werden.

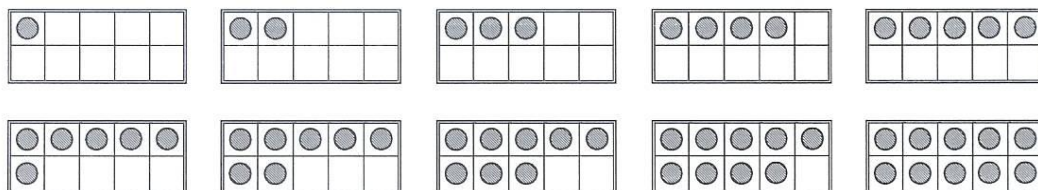


Abbildung 10: Darstellung der Zahlen 1 bis 10 auf dem Zehnerfeld³⁰

Wie aber ist es nun möglich, den wegzunehmenden Teil zu entfernen? Das Schulbuch „Die Matheprofis 1“³¹ zeigt eine ideale Möglichkeit.

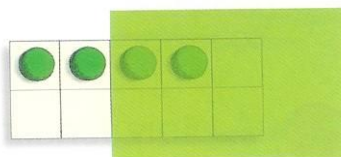


Abbildung 11: Abdeckfläche für Minusaufgaben

Jedes Kind erhält ein zugeschnittenes Stück durchsichtiger Folie als Abdeckfläche, die etwas größer als ein Zehnerfeld ist. Mit dieser Folie ist es dann durchführbar, Minusterme darzustellen. Da der wegzunehmende Teil nicht entfernt wird, sondern nur durch Abdecken gekennzeichnet wird, kann gleichzeitig die Gesamtmenge, die wegzunehmende Menge und die Restmenge gesehen werden. Dies zeigt deutlich die Beziehung zwischen den drei beteiligten Zahlen. Viele verschiedene Schüleraktivitäten schließen sich dieser Erarbeitung an.

2.1.2.3 Unterrichtseinheit – Übungen zu „eins weniger“, „zwei weniger“

Die Arbeit mit der

³⁰ GERSTER & SCHULTZ 1998, S. 345

³¹ SCHÜTTE u. a. 2006, S. 63

*Zwei-weniger-Maschine*³²

Es wird das Bild einer Maschine an die Tafel gezeichnet. Man sagt den Kindern, dass diese „Denkmaschine“ immer eine Zahl ausspuckt, die zwei weniger ist, als die Zahl, die man eingibt. Dazu kann man Karten anfertigen, deren Vorderseite die Eingabezahl als Ziffer oder Punktmuster zeigt und deren Rückseite die Ausgabezahl angibt. Man lässt die Eingabezahl langsam durch die Maschine wandern. Nachdem die Kinder die Ausgabezahl gerufen haben, wendet man die Karte zur Bestätigung in der Nähe des Ausgangs der Maschine.

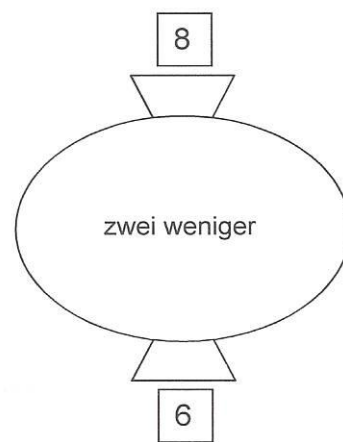


Abbildung 12: Zwei-weniger-Maschine³³

Diese Übung eignet sich auch als Tempo-Übung ohne Karten. Eine Eingabezahl wird genannt und die Kinder rufen sehr rasch die Ausgabezahl³⁴. Diese Maschine kann auch zu einer *Zwei-mehr-Maschine* umgewandelt werden.

GERSTER und SCHULTZ³⁵ betonen die Wichtigkeit dieser Unterrichtseinheit und dieses Themas: „Das Automatisieren von „eins mehr“, „zwei mehr“, „eins weniger“, „zwei weniger“ ist Voraussetzung für viele **Rechenstrategien**, wie beispielsweise

$5 + 5 = 10$, also ist $5 + 7 = 12$	(zwei mehr)
$10 + 5 = 15$, also ist $9 + 5 = 14$	(eins weniger)
$10 + 7 = 17$, also ist $8 + 7 = 15$	(zwei weniger)
$5 \cdot 8 = 40$, also ist $7 \cdot 8 = 56$	(zweimal 8 mehr)

³² GERSTER & SCHULTZ 1998, S. 343

³³ GERSTER & SCHULTZ 1998, S. 343

³⁴ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 1998, S. 343

³⁵ 1998, S. 343

$$10 \bullet 8 = 80, \text{ also ist } 9 \bullet 8 = 72 \quad (\text{einmal } 8 \text{ weniger})"$$

Auch für diese Unterrichtseinheit steht für die Anwendung ein Arbeitsblatt (siehe Anhang) zur Verfügung.

2.1.2.4 Unterrichtseinheit – Rechnungen finden

Ein Tafelbild zeigt den Arbeitsauftrag:

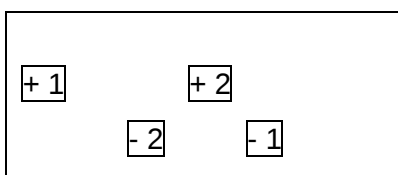


Abbildung 13: Tafelbild - Rechnungen finden

Die Kinder sollen Rechnungen notieren, die die gegebenen Operationen beinhalten. Es dürfen einfache und schwierige Rechnungen sein. Folgende Kinderarbeiten gingen daraus hervor:

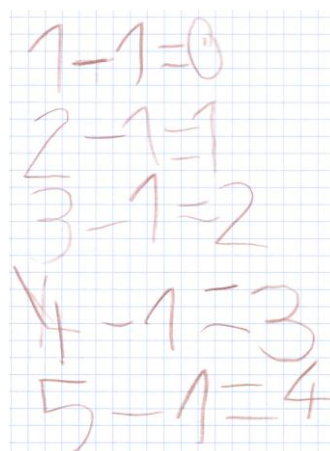
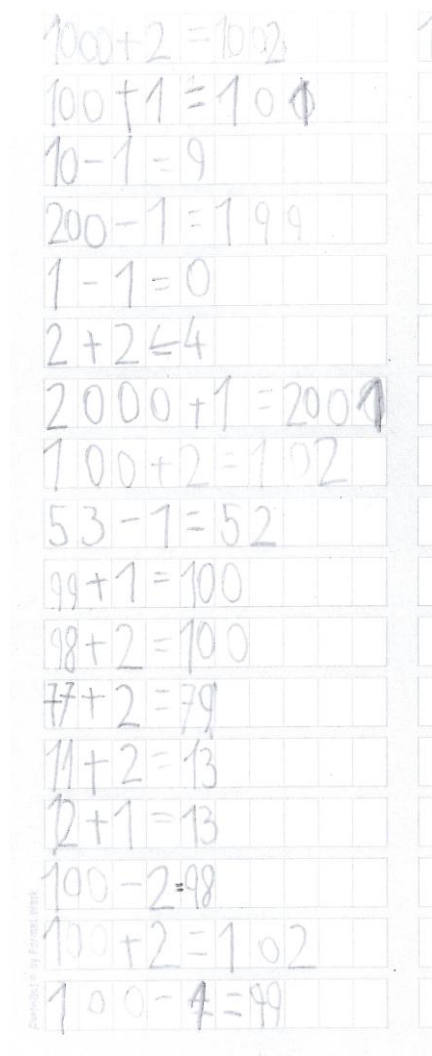


Abbildung 14: Schülerdokument 1

Abbildung 15: Schülerdokument 2

Mit dieser Arbeitsanweisung ist eine „natürliche Differenzierung“ gelungen. Die Aufgaben bieten für die Leistungsschwächeren einen Einstieg in die Thematik und öffnen zugleich für die Leistungsstarken viele Bearbeitungsmöglichkeiten. Die Schülerdokumente zeigen ganz deutlich, dass es immer wieder notwendig ist, Lernumgebungen für das gesamte Begabungsspektrum anzubieten.

2.1.3 Addieren/Subtrahieren der Null

Die Beherrschung des kleinen Einspluseins/Einminuseins besteht im Auswendigwissen oder blitzschnellem Herleiten aller 121 Aufgaben des kleinen Einspluseins und aller 121 Aufgaben des kleinen Einsminuseins.

Die Aufgaben vom Typ $+ 0$, $- 0$ und Tauschaufgaben lassen sich leicht erarbeiten, wenn die Null bei der Erarbeitung der Anzahlen als „Nichts“ deutlich wurde. Dafür eignet sich bereits zu einem früheren Zeitpunkt der „Spindelkasten“, ein „Mathematisches Material der Montessoripädagogik“.



Abbildung 16: Spindelkasten

Spindelkasten:

Mit diesem Material lässt sich die Null gut einführen. Vorerst wird einmal mit losen Einheiten (Spindeln) in die Hand gezählt, mit einem Gummiring wird die jeweilige Anzahl gebündelt und in das richtige Fach gelegt. Der Kardinalaspekt der Zahlen wird hervorgehoben. „Null ist nichts!“ In dieses Fach kann man keine Spindel legen.

Weitere Aufgaben werden wieder mit dem „Zählsack“, den Zahlendarstellungen und mit Arbeitsblättern (siehe Anhang) bearbeitet und gelöst.

2.1.4 Verdoppeln und Halbieren

Nach den grün markierten Randaufgaben mit Null, den Aufgaben $+ 1$, $+ 2$ und den dazugehörigen Tauschaufgaben auf dem Einspluseins-Plan nach Wittmann/Müller folgt die Erarbeitung der Aufgaben des Verdoppelns und Halbierens. Diese gehören häufig zu den ersten Aufgaben, welche die Kinder auswendig wissen. Immer wieder werden diese Verdoppelungsaufgaben von den Kindern am Plan entdeckt und besprochen.

Die Erarbeitung des Verdoppelns wird mit dem Spiegel erarbeitet. Dafür benötigt jedes Kind eine Spiegelfliese.

2.1.4.1 Unterrichtseinheit – Entdeckungen mit dem Spiegel

Die Kinder dürfen vorerst einmal mit ihren Spiegeln durch den Klassenraum gehen und Entdeckungen machen. – „Was der Spiegel alles kann!“



Abbildung 17 a/b/c: Kinder machen Entdeckungen mit dem Spiegel 1

Dabei entstanden Aussagen wie:

„Wir sehen uns tausendmal.“

„Ich glaube, ich gehe auf der Decke.“

„Ich kann das Fenster zu mir holen.“

„Wir sehen einen Turm, der hinunter geht.“



Abbildung 18: Entdeckungen mit dem Spiegel 2

Das Mädchen experimentiert mit Wörtern und entdeckt die Spiegelschrift.

Im Anschluss folgen Spiegelungen von Darstellungen. Die Kinder schreiben ihre Namen, zeichnen Häuser und probieren mit ihren Spiegeln.



Abbildung 19 a/b/c: Spiegelungen von Darstellungen

2.1.4.2 Unterrichtseinheit – Verdoppeln von Anzahlen

Die Kinder spiegeln eine bestimmte Menge von Stiften. Wichtig für die Entdeckungen ist die Sprechweise: „Vor dem Spiegel sehe ich 2, im Spiegel sehe ich auch 2. Zusammen sind es 4.“



Durch den sprachlichen Austausch im Klassengespräch entsteht die mögliche Aussage: „Der Spiegel macht es mehr“. „Man sieht zweimal das Gleiche hintereinander.“ „Das ist dann doppelt!“ So entdecken die Kinder den Begriff der Verdoppelung.

Abbildung 20: Verdoppelung mit dem Spiegel

Im Anschluss folgt das Spiegeln von Wendeplättchen.

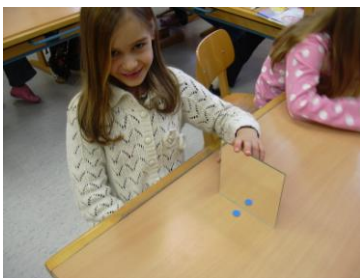


Abbildung 21 a/b/c: Spiegeln von Wendeplättchen

Zuerst werden ungeordnete, später geordnete Anzahlen gespiegelt.

2.1.4.3 Unterrichtseinheit – Verschriftlichung im Heft

Der Auftrag an die Kinder könnte lauten: „Wie ist es möglich, diese Spiegelungen im Heft festzuhalten?“ Die Schülerinnen und Schüler entwickeln die verschiedensten bildlichen Darstellungen.

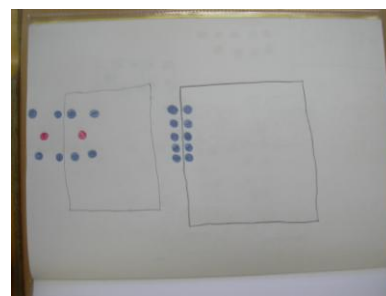


Abbildung 22 a/b: Bildliche Darstellung von Spiegelungen

Der Hinweis „Zeichne nur die wichtige Seite des Spiegels“, führt die Kinder dann zur „Spiegelachse“. Mit diesem Wissen und diesen Erfahrungen ist es dann den Kindern möglich, verschiedene Arbeitsblätter zu den Bereichen „Spiegelbilder“ und „Verdoppeln mit dem Spiegel“ zu bearbeiten.

2.1.4.4 Unterrichtseinheit – Legen von Verdoppelungen am Zwanzigerfeld

Durch die Arbeit mit dem Zwanzigerfeld anstatt mit dem Zehnerfeld ist es den Kindern auch möglich, Verdoppelungen über die Zehn hinaus zu legen. Der Umgang mit dem Zehnerfeld ist den Kindern zu diesem Zeitpunkt sehr gut bekannt und daher ist eine Überleitung auf das doppelte Zehnerfeld nicht schwierig. Die Kinder sollen nun Verdoppelungen am Zwanzigerfeld so legen, dass man die Anzahlen gut erkennen kann.

Folgende Bilddokumente zeigen die verschiedensten Darstellungen:



Abbildung 23: Verschiedene Verdoppelungen am Zwanzigerfeld 1

Einige verwenden die senkrechte Mittellinie zwischen den beiden Zehnern als Spiegelachse, andere wieder entscheiden sich für die waagrechte Achse. Manche legen wunderbare Spiegelmuster.



Abbildung 24: Verschiedene Verdoppelungen am Zwanzigerfeld 2

In einer kleinen Rechenkonferenz werden die Legebilder besprochen und die Kinder einigen sich auf eine einheitliche Darstellung. Bei dieser Darstellung sind die Summanden getrennt untereinander gelegt, das einer Verdoppelung mit dem Spiegel entspricht. Das Ergebnis kann leicht abgelesen werden, weil die übereinanderliegenden Fünfer einen Zehner ergeben („Kraft der Fünf“). Im Zahlenraum bis 8 kann der Bezug zu den Würfelbildern hergestellt werden. Durch strukturierte Anzahldarstellung wird bloßes Zählen überwunden. Es muss das Verdoppeln im Mittelpunkt stehen und nicht das Zählen vor und im Spiegel.

Es war und ist für die Kinder einfacher, wenn eine Anordnung erarbeitet oder vorgeschlagen wurde oder wird, die für alle Sicherheit bietet. Jede Unterrichtseinheit muss immer wieder auf die Klassensituation ausgerichtet werden. In der Einzelförderung kann der Rahmen vielleicht manchmal größer gesteckt werden.

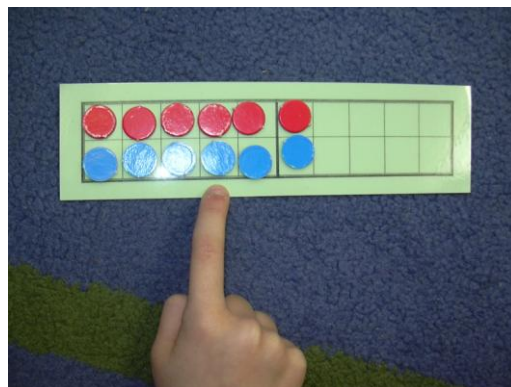
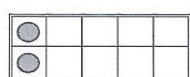
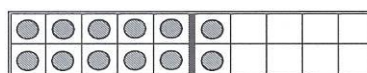


Abbildung 25: Darstellung der Verdoppelung durch anschauliches Legen

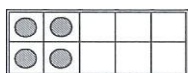
Durch diese Form des Legens ergeben sich für die Kinder einprägsame Bilder.



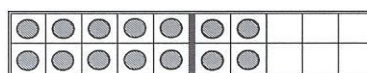
$$1 + 1 = 2$$



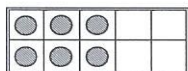
$$6 + 6 = 12$$



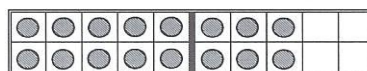
$$2 + 2 = 4$$



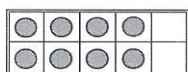
$$7 + 7 = 14$$



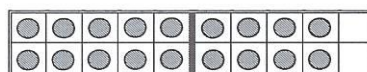
$$3 + 3 = 6$$



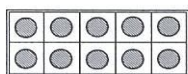
$$8 + 8 = 16$$



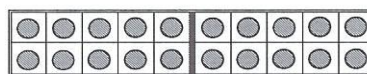
$$4 + 4 = 8$$



$$9 + 9 = 18$$



$$5 + 5 = 10$$



$$10 + 10 = 20$$

Abbildung 26: Verdoppelungen im Zahlenraum bis 20³⁶

Die Ähnlichkeiten der Verdoppelungsaufgaben von 1 und 6, 2 und 7, 3 und 8 sowie 4 und 9 zeigen den Vorteil der „Kraft der Fünf“.

³⁶ GERSTER & SCHULTZ 1998, S. 365

2.1.4.5 Unterrichtseinheit – Rechensätzchen – Verdoppelungen

Die durch Legen erarbeiteten Verdoppelungen werden in Rechensätzchen umgewandelt und in die passende Symbolschrift gebracht. Durch das Spiegeln ist die Anschauung gegeben. Die Kinder erkennen die gleiche Anzahl im Spiegel wie vor dem Spiegel und addieren zweimal die gleiche Zahl. Es gilt nun zwischen Additionsaufgaben mit gleichen Summanden und dem Verdoppeln von Zahlen eine Verbindung herzustellen. Die Kinder notieren dies zeichnerisch und mit Zahlen und Pluszeichen.

$$\boxed{1 + 1 = 2}$$

$$\boxed{2 + 2 = 4}$$

$$\boxed{3 + 3 = 6}$$

$$\boxed{4 + 4 = 8}$$

$$\boxed{5 + 5 = 10}$$

Die Aufgaben ergeben so ein „schönes Päckchen“.

Die Kinder färben diese Aufgaben in ihrer Einpluseins-Tafel mit roter Farbe.

$$\boxed{6 + 6 = 12}$$

$$\boxed{7 + 7 = 14}$$

$$\boxed{8 + 8 = 16}$$

$$\boxed{9 + 9 = 18}$$

$$\boxed{10 + 10 = 20}$$

Arbeitsblätter zum Verdoppeln dienen der weiteren Übung und Automatisierung (siehe Anhang).

In der Rechendidaktik bezeichnet man die Verdoppelungsaufgaben als Kernaufgaben des kleinen Einpluseins. Man kann von ihnen ausgehend zahlreiche Nachbareaufgaben operativ herleiten.

Beispiel für Nachbareaufgaben von 4 plus 4:

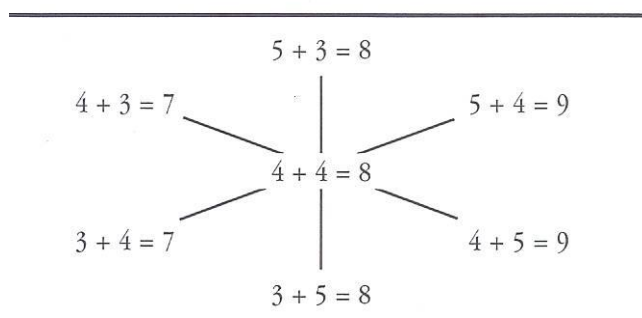


Abbildung 27: Beispiele für Nachbareaufgaben³⁷

³⁷ HENGARTNER u. a. 2006, S. 36

$\boxed{4 + 4}$ ist die Verdoppelungsaufgabe. Mithilfe dieser Verdoppelungsaufgabe lassen sich die Aufgaben $\boxed{4 + 3}$ sowie $\boxed{3 + 4}$ durch vergleichendes Rechnen (ein Summand wird jeweils um 1 weniger) lösen. Die verbleibenden Aufgaben der Abbildung 27 werden durch die „Kraft der Fünf“ erarbeitet.

In der Einpluseins-Tafel erscheinen diese Aufgaben auf benachbarten Feldern von 4 plus 4 in folgender Anordnung:

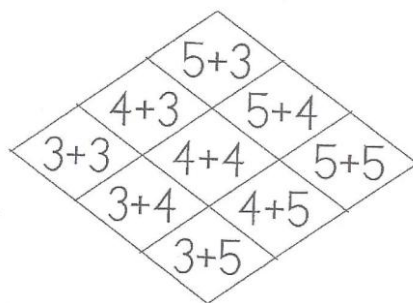


Abbildung 28: Benachbarte Felder von $4+4$ ³⁸

In diesem Zusammenhang verweisen WITTMANN und MÜLLER³⁹ auf die Bedeutung der Einspluseins-Tafel als Aufgabendisplay für Aufgaben im Zahlenraum 10 bzw. 20.

2.1.4.6 Unterrichtseinheit – Weiterführung der Verdoppelungen

Im Sinne offener Aufgabenstellungen könnte der weitere Verlauf folgendermaßen aussehen⁴⁰:

- Es werden anstelle von Plättchen andere Materialien gespiegelt: Geldstücke oder Dominosteine. Wobei bei Dominosteinen zwei Summanden verdoppelt werden und dadurch die verdoppelte Summe entsteht.
- Die Kinder erhalten im Anschluss Aufgabenpäckchen und verdoppeln beide Summanden. Daher entsteht aus der Aufgabe $\boxed{2 + 3} \rightarrow \boxed{4 + 6}$

$$\boxed{4 + 5} \rightarrow \boxed{8 + 10}$$

³⁸ HENGARTNER u. a. 2006, S. 36

³⁹ 1990, S. 45-51

⁴⁰ Vgl. HENGARTNER u. a. 2006, S. 36-37

- Die neu entstandenen Aufgaben können nochmals verdoppelt werden.

2.1.4.7 Unterrichtseinheit – Halbieren

Dafür wird folgende Lernumgebung vorbereitet: Die Kinder haben eine große Menge an Perlen zum Fädeln und Schnüre zur Verfügung. Die Schnüre werden an einem Ende mit einem großen Knoten versehen. An einer Klassenwand ist eine Leine gespannt. Der Arbeitsauftrag an die Kinder lautet: „Fädle eine beliebige Anzahl von Perlen auf deine Schnur und hänge sie so auf, dass an beiden Seiten womöglich gleich viele Perlen sind. Versuche die Hälfte zu finden!“ Nach dem Fädeln wird nach der letzten Perle ebenfalls ein Knoten gemacht. Während einige noch länger mit der Herstellung der Ketten beschäftigt sind, hängen manche ihre Ketten genau in der Mitte oder fast in der Mitte über die Schnur im Klassenraum. Schon bald erkennen einige Kinder den Zusammenhang zu den Verdoppelungen.

Die weitere Arbeit gestaltet sich folgendermaßen:

- Die hängenden Ketten werden betrachtet und untersucht. Da der Arbeitsauftrag „in zwei gleiche Hälften“ lautet, werden einige zur Seite geschoben.
- Die verbleibenden Ketten werden sprachlich begründet: „4 lässt sich in 2 gleiche Teile teilen“ ebenso „8“.
- An der Tafel wird es als $4 = 2 + 2$ angeschrieben. In dieser Form werden alle weiteren Ketten besprochen.

Um den Bezug zu den Spiegelaufgaben (= Verdoppelungen) wieder herzustellen, werden die Verdoppelungen mit dem Spiegel noch einmal analysiert. So legen die Kinder eine bestimmte Anzahl von Wendeplättchen am Zwanzigerfeld in der strukturierten Darstellung,

- verdoppeln diese mit dem Spiegel ($\rightarrow 2 + 2 = 4$),
- nehmen den Spiegel wieder weg ($\rightarrow$ aus 4 wird 2. Es entsteht wieder die Ausgangszahl. Die Zahl wird halbiert.)

Im Anschluss lässt sich die Hälfte auch schriftlich durch Zeichnen oder mit Hilfe von Tabellen darstellen.

2.1.4.8 Unterrichtseinheit – Umkehraufgaben zu den Verdoppelungen

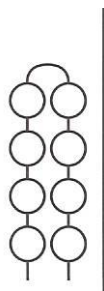
Die Erarbeitung der Verdoppelungsaufgaben zählt zu den spannendsten Einheiten. Die Kinder gewinnen durch diese Entdeckungen zunehmend das Interesse an Zahlen und mathematischen Denkweisen.

Die Verdoppelungsaufgaben gehören zu den Lieblingsaufgaben der Kinder und es gelingt auch, diese zu automatisieren. Doch:

- Erkennen sie auch den Zusammenhang von Verdoppelungs- und Halbierungsaufgabe?
- Können sie die entsprechenden Umkehraufgaben schnell und sicher lösen?
- Wird die „versteckte“ Spiegelaufgabe erkannt?

1. Schritt:

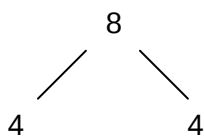
Halbieren der Perlenketten:



Die Halbierungsaufgabe wird noch einmal thematisiert: $8 = 4 + 4$

2. Schritt:

Hinführen zu einer anderen Schreibweise:



Die hängende Kette wird in eine andere Schreibweise umgedacht: Die Kette hat 8 Perlen. Wenn diese Kette aufgehängt wird, entstehen 2 Teile zu jeweils 4 Perlen.

3. Schritt:

Die Spiegelaufgabe hilft bei Minusaufgaben.

$$4 + 4 = 8$$

$$8 - 4 = 4$$

Es wird eine Verbindung hergestellt zwischen dem Schritt 2, der deutlich die Zerlegungsaufgabe zeigt. Das Ganze besteht aus zwei Teilen, die in diesem Fall gerecht verteilt sind (= halbiert). Alle weiteren Aufgaben werden auf die gleiche Weise bearbeitet.

4. Schritt:

Arbeit mit dem Zwanzigerfeld:

$4 + 4$ wird gelegt



Abbildung 29: Legebild 4+4 am Zwanzigerfeld

Die Umkehraufgabe lautet $8 - 4$. Die Kinder führen die Umkehrhandlung durch und nehmen 4 Plättchen weg.

2.1.4.9 Unterrichtseinheit – Nachbaraufgaben zu den Verdoppelungen

Die Kinder suchen an der Einspluseins-Tafel die Verdoppelungen und alle Nachbaraufgaben. Das sind jene, die an einer Seite mit dem Feld der Verdoppelungen zusammenstoßen – eben Nachbarn sind.

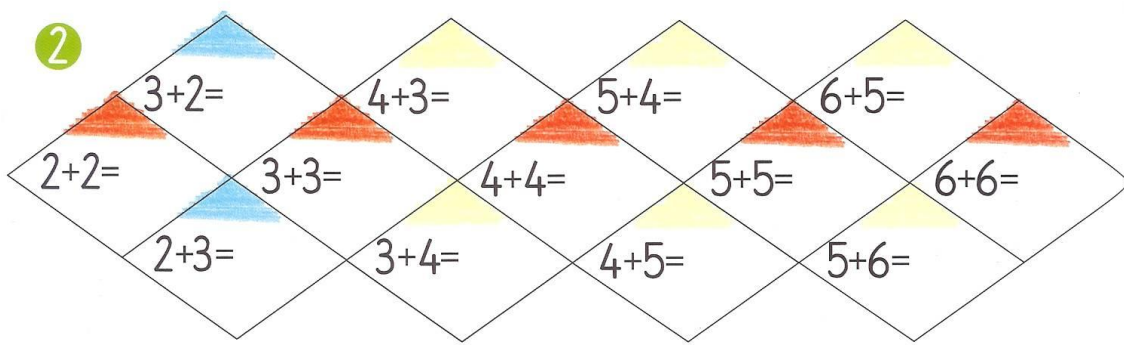


Abbildung 30: Nachbaraufgaben zu den Verdoppelungen⁴¹

Die Aufgaben werden von den Kindern herausgesucht und notiert. Jede Nachbaraufgabe ist bezogen auf die beiden Summanden zweimal vorhanden. Zwei Aufgaben lassen sich als Tauschaufgaben einander zuordnen.

Ausgehend von der Aufgabe $4 + 4$ entsteht folgendes Bild:

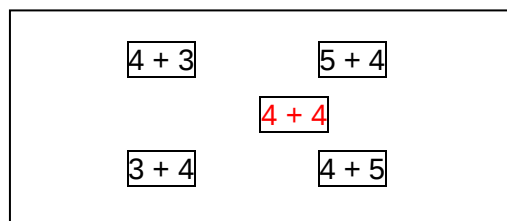


Abbildung 31: Tafelbild – Nachbaraufgaben 1

$4 + 4$ wird wie oben am Zwanzigerfeld gelegt. Nun wird die Aufgabe abgewandelt, indem ein rotes Plättchen dazugelegt wird – somit entsteht $5 + 4$. Die Tauschaufgabe wird unmittelbar danach bearbeitet.

Um die linken Nachbaraufgaben zu lösen, muss zur Ausgangsaufgabe (der Verdoppelungsaufgabe) zurückgekehrt werden. Für die Aufgabe $4 + 3$ muss ein blaues Plättchen weggenommen werden. Die Tauschaufgabe schließt sich wieder an.

Die Beziehungen „eins mehr“ bzw. „eins weniger“ dienen für diese operativen Abwandlungen als eine wichtige Grundlage.

Analog dazu suchen die Kinder nach weiteren Nachbaraufgaben und wenden die neu erarbeitete Lösungsstrategie an.

⁴¹ STEINER 2001, S. 68

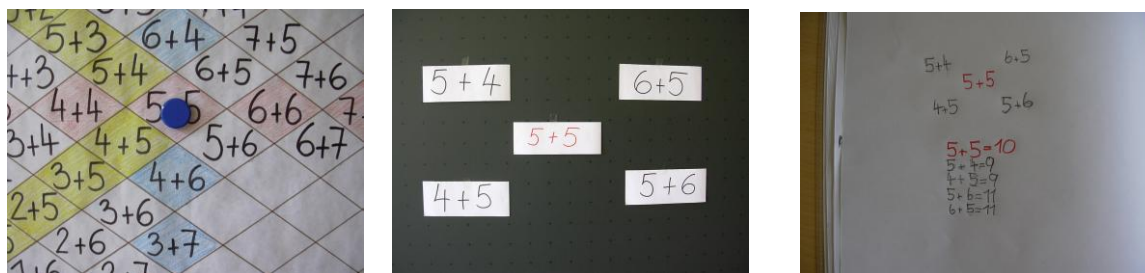


Abbildung 32 a/b/c: Nachbaraufgaben zu den Verdoppelungen an der Einspluseins-Tafel

2.1.4.10 Unterrichtseinheit – Nachbaraufgaben zu den Halbierungen

Das Lösen der Halbierungs- und Nachbaraufgaben gestaltet sich in ähnlicher Weise wie bei den Verdoppelungsaufgaben. Um eine Halbierungsaufgabe werden die dazugehörigen Nachbaraufgaben angeordnet. Die Kinder gruppieren sie zu folgendem Bild:

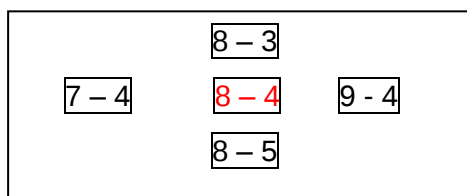


Abbildung 33: Tafelbild mit Nachbaraufgaben 2

Zur leichten Bearbeitung werden Aufgaben, die an zwei Positionen eine Veränderung zeigen, in dieses Tafelbild nicht aufgenommen.

Beim Legen und Lösen dieser Aufgaben treten folgende Überlegungen in den Mittelpunkt:

- Was passiert, wenn die Zahl vor oder nach dem Minuszeichen größer wird?
- Was passiert, wenn sie kleiner wird?

Zur Unterstützung und Förderung wird immer wieder auf das Zwanzigerfeld zurückgegriffen. Die neu erarbeiteten Aufgaben färben die Kinder in ihrer Einspluseins-Tafel und entdecken so, dass in der linken Hälfte (sie umfasst die Aufgaben im Zahlenraum 10) nur mehr wenige Rechensätzchen unbemalt bleiben.

2.1.5 Fünf und etwas dazu

Bei der Erarbeitung der Anzahlen wird mit Fingerbildern gearbeitet. GAIDOSCHIK⁴² beschreibt den Aufbau der Fingerbilder der Zahlen bis 10:

Gemeint ist: Das Kind soll in einem ersten Schritt lernen, mit 5 stets auch die Vorstellung „alle Finger auf einer Hand“ zu verknüpfen. Mit 10 „alle Finger auf beiden Händen zusammen.“ Mit 8 die Vorstellung „auf einer Hand 5, auf der anderen 3“. Mit 6 die Vorstellung „5 Finger auf einer Hand, 1 auf der anderen“.

Diese Vorstellungen werden sich bei vielen Kindern bald von selbst einstellen. Andere Kinder werden dagegen die Zahl 8 immer nur durch Einzel-Hochzählen mit den Fingern darstellen können – geschweige denn, dass ein „inneres Bild“ dieser Darstellung abruf wäre.

Diese halten aufgrund ihres Zahlen-Denkens ja tatsächlich die Zählhandlung selbst für das Wesentliche und gerade nicht die dadurch ermittelte Anzahl. Diese kann aber bewusst gemacht werden: Das Kind muss nur dazu aufgefordert werden, gerade das in Worte zu fassen, was sich durch das Hochzählen an seinen Händen ergeben hat: „Ich habe jetzt 8 Finger ausgestreckt, auf einer Hand 5 Finger, auf der anderen 3 Finger.“

Ein im Weiteren oft sinnvoller Zwischenschritt: Das Kind soll die Zahl mit den Fingern zeigen – aber unter dem Tisch oder unter einem Tuch. Es kann die Finger also spüren, aber nicht sehen. Dennoch soll es versuchen zu sagen, wie viele Finger es an den einzelnen Händen ausgestreckt hält.⁴³



Abbildung 34: Inneres Fingerbild - Verdecktes Ausstrecken von acht Finger⁴⁴

⁴² 2002, S. 70-71

⁴³ GAIDOSCHIK 2002, S. 71

⁴⁴ GAIDOSCHIK 2002, S. 71

Von diesem „inneren Finger-Bild“ der Zahl ausgehend lässt sich nun unmittelbar eine Fülle von „Rechenaufgaben“ unschwer erarbeiten. Alleine aus der Vorstellung von 7 als „5 + 2“ beispielsweise ergeben sich folgende Verknüpfungen:⁴⁵

- Zerlegung 1: $7 = 5 + 2$
- Zerlegung 2: $7 = 2 + 5$
- Addition 1: $5 + 2 = 7$
- Addition 2: $2 + 5 = 7$
- Subtraktion 1: $7 - 5 = 2$
- Subtraktion 2: $7 - 2 = 5$
- Ergänzung 1: $2 + ? = 7$, Antwort: 5!
- Ergänzung 2: $5 + ? = 7$, Antwort: 2!

Abbildung 35: Rechenaufgaben zum Fingerbild von 7⁴⁶

Nachdem die Fingerbilder nach diesem Vorbild erarbeitet sind, können Aufgaben mit 5 im 1. Summanden und auch die dazugehörigen Tauschaufgaben bearbeitet werden.

Aufgaben wie	$5 + 1$ $5 + 2$ $5 + 3$ $5 + 4$ $5 + 5$	und ihre Tauschaufgaben	$1 + 5$ $2 + 5$ $3 + 5$ $4 + 5$
--------------	---	-------------------------	--

werden vorerst mit Hilfe der Fingerbilder gelöst – eine Hand zeigt 5, die andere Hand 1 oder 2, bzw. 3 oder 4 sowie 5. Die Kinder kreuzen die Hände und schon ist die Tauschaufgabe zu sehen (Arbeitsblätter siehe Anhang).

Nach der Arbeit mit den Fingerbildern werden die Zahldarstellungen am Zehnerfeld als Anschauungsmaterial verwendet.

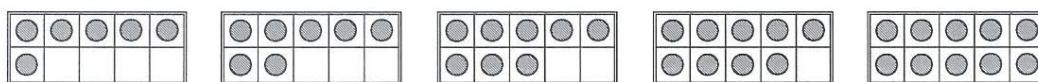


Abbildung 36: Zahldarstellungen am Zehnerfeld⁴⁷

⁴⁵ GAIDOSCHIK 2002, S. 72

⁴⁶ GAIDOSCHIK 2002, S. 72

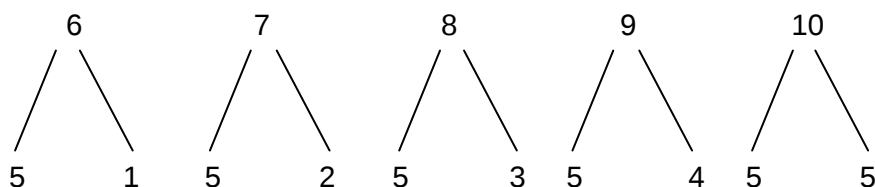
⁴⁷ GERSTER & SCHULTZ 1998, S. 345

Aus diesen Zahldarstellungen können die Kinder alle Aufgaben ableiten, die auch schon mit Hilfe der Fingerbilder entdeckt und gebildet wurden. Das Schülerdokument zeigt alle möglichen Aufgaben aus der Zahldarstellung von 8.

$$\begin{array}{l} 5 + 3 = 8 \\ 3 + 5 = 8 \\ 10 - 2 = 8 \\ 8 - 3 = 5 \\ 8 - 5 = 3 \end{array}$$

Abbildung 37: Schülerdokument zur Zahldarstellung von 8

Aufgrund der Arbeit mit den Fingerbildern und mit den Zahldarstellungen bietet sich auch im Bereich „Fünf und etwas dazu“ die Zerlegungsschreibweise als Einsicht in das Teile-Ganzes-Konzept an. So besteht die Gesamtheit von 6 aus zwei Teilen: eine Hand zeigt 5 und die andere Hand 1. Diese Handlung wird in folgende Schreibweise übertragen:



Wenn die Teile jedes einzelnen Fingerbildes die Plätze tauschen, so ergeben sich weitere 4 Zerlegungen in dieser Schreibweise.

2.1.6 Das Teile-Ganzes-Konzept

Die Grundlage für das Verständnis von Addition, Subtraktion, Ergänzung und Zerlegung bietet die Einsicht in das Teile-Ganzes-Konzept.

JANSEN⁴⁸ zeigt im systematisch aufgebauten „Basiskurs Mathematik“ einen möglichen Zugang zur Erarbeitung des Verständnisses – ein Ganzes und seine möglichen Teile. Der Basiskurs besteht aus folierten Arbeitskarten, die von den Kindern mit Folienstiften beschriftet werden.

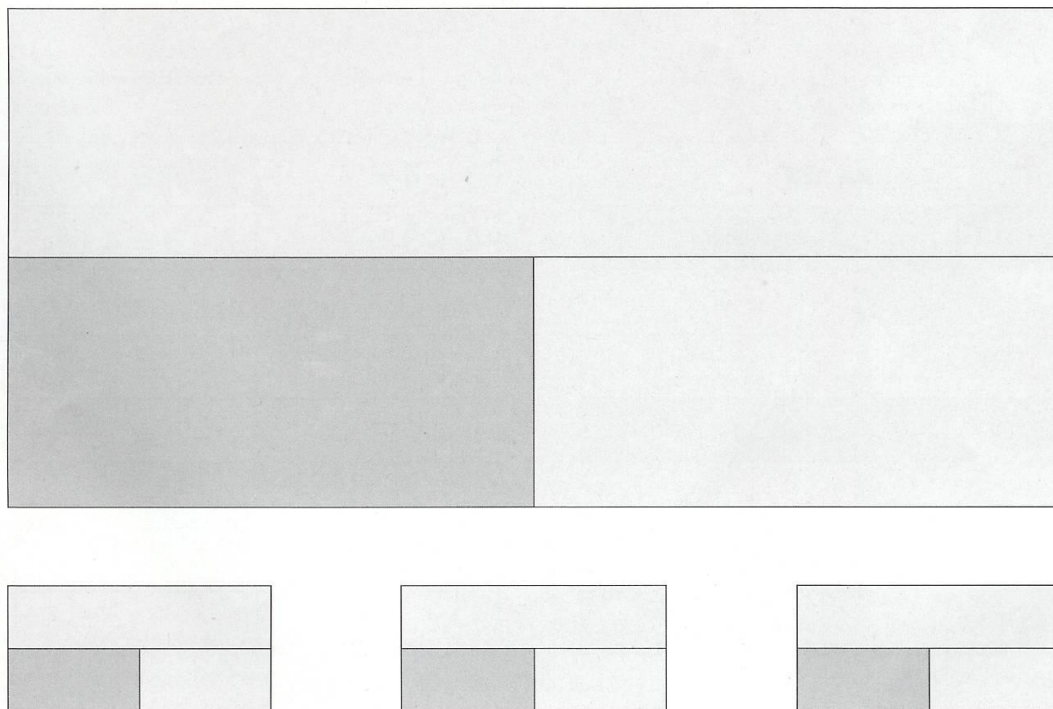


Abbildung 38: Arbeitskarte zum Teile-Ganzes-Konzept 1⁴⁹

JANSEN⁵⁰ beschreibt die Arbeit mit der Arbeitskarte in folgender Weise: An der Rechentafel gilt die Regel „Oben ist das Ganze, unten die Teile.“ Die Kinder erhalten die Aufgabe $5 + 2$, legen mit Steckwürfel auf eines der beiden Teilmengenfelder 5 und auf das andere Teilmengenfeld 2. Dann fügen sie beide Teilmengen nach oben hin zu einem Ganzen zusammen und erhalten als „Ganzes“ die Menge 7. In einer der verkleinerten

⁴⁸ 2005, S. 18-23

⁴⁹ JANSEN 2005, S. 21

⁵⁰ 2005, S. 18-23

Rechentafeln darunter wird die Aufgabe schriftlich festgehalten: in den unteren Feldern wird 5 und 2 geschrieben und als Gesamtheit steht oberhalb 7. Die mathematische Bedeutung liegt in der Verbindung von zwei Teilen zu einer Gesamtheit. Es besteht ebenso die Möglichkeit das Ganze in seine möglichen Teile zu zerlegen. Die Kinder legen 7 als Ganzes nach oben und verschieben die leicht erkennbare Teilmenge 5 auf das eine und die verbliebene Teilmenge 2 auf das andere Teilmengenfeld. Das gelingt besonders gut, wenn fünf Steckwürfel in einer anderen Farbe gesteckt werden. Sobald die Kinder das Prinzip verstanden haben, werden Ergänzungsaufgaben und Rechengeschichten zur Umsetzung an der Rechentafel (= Arbeitskarte) vorgegeben. Bei der Subtraktion wird ein vorgegebenes Ganzes in Teilmengen zerlegt. Die Rechentafel macht hier sowohl das Prinzip der additiven Zusammensetzungen von Zahlen ($7 = 5 + 2$) sowie das Kommutativgesetz ($5 + 2 = 2 + 5$) als auch das Prinzip der inversen Beziehung zwischen Addition und Subtraktion ($7 - 2 = 5$, weil $5 + 2 = 7$) deutlich.

JANSEN verweist auch auf Untersuchungen, die zeigen, dass die Fähigkeit zum Lösen von Rechengeschichten vor allem von der Beherrschung dieser Prinzipien abhängt.

Weitere Arbeitskarten des Basiskurses Mathematik im Bereich Teile-Ganzes-Konzept geben bereits Zahlen in den Feldern vor. Die Kinder ergänzen die fehlenden Zahlen und gewinnen zunehmend operative Einsichten.

26	8 5	50	3 2	28
10 0	61	7 2	46	1 0
90	9 1	62	7 3	72

Abbildung 39: Arbeitskarte Teile-Ganzes-Konzept ⁵¹

JANSEN⁵² betont die operativen Fachbegriffe „Teil“ und „Ganzes“. Er sieht hingegen, dass Kinder den Begriff „Ergebnis“ oft als einzigen operativen Begriff kennen. „Ergebnis“

⁵¹ JANSEN 2005, S. 22

⁵² 2005, S. 18-23

ist aber immer das Resultat eines zeitlich sukzessiven Vorganges: „Zuerst“ sind 3 da, „dann“ kommen 5 hinzu und „am Ende“ sind es 8. So bleiben die Kinder dieser Vorstellung einer Abfolge verhaftet, die zu einer Übergeneralisierung führt. Es lässt den Eindruck entstehen, dass das „Ergebnis“ immer „hinten“ steht und so werden Ergänzungsaufgaben wie $8 = 3 + ?$ mit dem „Ergebnis“ 11 gelöst.

Aufgabenstellungen, die sowohl die Rechenaufgabe als auch die Felddarstellung zeigen, fordern die Kinder zur Identifizierung – welche Zahl steht für das Ganze, welche Zahl steht für einen Teil – auf.

$$3 + 2 = \square$$

$$2 + 1 = \square$$

$$2 + \square = 6$$

$$\square + 1 = 4$$

Lösung

$3 + 2 = 5$	5	
	3	2

$2 + 1 = 3$	3	
	2	1

$2 + 4 = 6$	6	
	2	4

$3 + 1 = 4$	4	
	3	1

Abbildung 40: Arbeitskarte Teile-Ganzes-Konzept 3⁵³

Kann ein Kind eine Aufgabe wie $2 + ? = 7$ erst einmal in die Darstellung der Rechentafel übertragen, das heißt - die 7 als Ganzes identifizieren und die 2 als einen Teil – so weist die Felddarstellung die möglichen Lösungswege. Der unbekannte kann Teil sowohl durch ergänzendes Addieren oder durch eine Subtraktion berechnet werden. Die sprachliche Unterstützung durch die Fachbegriffe „Teil“ und „Ganzes“ führt zu einem angemessenen operativen Verständnis.

⁵³ JANSEN 2005, S. 23

Eine weitere Arbeitskarte zeigt, dass auch Textaufgaben in der Rechentafel mathematisiert werden. Die Aufgabe gilt als gelöst, wenn das Kind zu jeder Zahl angeben kann, was sie bedeutet – Teil oder Ganzes⁵⁴.

Textaufgaben

1 Hans hat 2 grüne Bälle und 4 rote Bälle.

2 Auf dem Hof stehen 5 Kinder. Es kommen 3 hinzu.

3 Eine Tafel Schokolade besteht aus 20 Stück. Tim bricht 4 Stücke ab.

4 In einer Kanne sind 3 Liter Milch. Tim gießt noch 2 Liter ein.

Lösung

6	
2	4

8	
5	3

20	
16	4

5	
3	2

Abbildung 41: Arbeitskarte Teile-Ganzes-Konzept 4⁵⁵

Der Verständnisaufbau für das Teile-Ganzes-Konzept gelingt vor allem mit Aufgaben, die dem Format „Fünf und etwas dazu“ folgen. Um jedoch sämtliche Möglichkeiten der Zahlzerlegung zu erarbeiten, bedarf es weiterer Schritte.

2.1.7 Zahlenzerlegen durch Einsicht in die Zerlegungs-Handlung

Eine tragfähige Zahlauffassung besteht darin, dass ein Kind diese Zahl in ihren Bezügen zu anderen Zahlen denkt. Die *dafür* wesentliche Verknüpfung ist das Zahlenzerlegen: „8“ beispielsweise ist erst dann hinreichend verstanden, wenn dabei Aufgaben „7 + 1“, „6 + 2“, „5 + 3“... selbstverständlich *mitgedacht* werden⁵⁶.

⁵⁴ Vgl. JANSEN 2005, S. 20

⁵⁵ JANSEN 2005, S. 23

⁵⁶ Vgl. GAIDOSCHIK 2002, S. 78

2.1.7.1 Unterrichtseinheit – Zahlenzerlegungen an der Kugelskette

Als Erarbeitungsmaterial für Zahlenzerlegungen eignet sich die Kugelskette. Wobei für jede Menge eine eigene Kette verwendet wird.

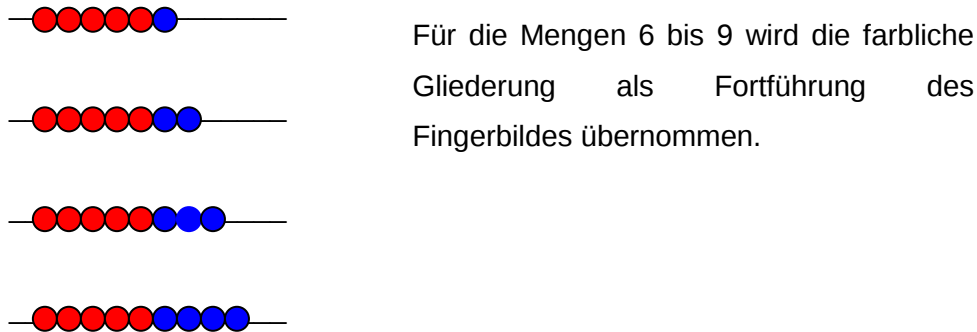


Abbildung 42: Zahlenzerlegungen an der Kugelskette 1

GAIDOSCHIK⁵⁷ schlägt für die Verwendung der Kugelsketten folgenden Weg vor:

1. An der Kugelskette muss zunächst die Einsicht erarbeitet werden, dass eine bestimmte Anzahl von Kugeln beliebig in zwei kleinere Anzahlen „zerlegt“ werden kann. Diese „Zerlegung“ kann durch Verschieben von einzelnen Kugeln beliebig verändert werden, ohne dass dies an der Gesamtzahl der Kugeln etwas ändert.
2. Eine beliebige Zerlegung kann in eine „Nachbarzerlegung“ verwandelt werden, indem genau eine Kugel von der einen auf die andere Seite verschoben wird. Dadurch wird die Teilanzahl auf der einen Seite um 1 weniger, auf der anderen um 1 mehr.

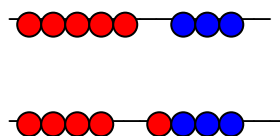


Abbildung 43: Zahlenzerlegungen an der Kugelskette 2

⁵⁷ 2002, S. 79

3. Die entstandene neue Zerlegung wird notiert und mit der Ausgangslage verglichen.
4. Der nächste Schritt ist das „Handeln in der Vorstellung“. Eine „Handzerlegung“ zum Beispiel der 8 in $5 + 3$ wird vom Kind durchgeführt. Dann wird die Kette jedoch mit einem Tuch verdeckt. Das Kind schiebt eine Kugel von links nach rechts und soll nun versuchen, die neue „Zerlegung“ der 8 Kugeln anzugeben.
5. Wenn dem Kind die „Verinnerlichung“ dieser Handlung schwer fällt, können Denkanstöße gegeben werden. „Hast du hier eine Kugel dazu geschoben?“ „Oder von hier eine weg geschoben?“ „Ist es hier mehr als vorher oder weniger als vorher?“
6. In der weiteren Erarbeitung geht es dann darum, dem Kind immer weniger Hilfestellungen zu geben: stets gerade so wenige wie möglich, aber so viele wie nötig. So wird es gelingen, den Grundgedanken des Zerlegens zu verstehen.

Erst auf Grundlage dieses Verständnisses kann nun das Automatisieren sämtlicher Zahlenzerlegungen erfolgen. Das Zerlegen im Zahlenraum 10 wird in Teilbereiche mit ansteigender Schwierigkeit untergliedert⁵⁸.

Additives Zerlegen			
„Hand-Zerlegungen“	Nachbarn der „Hand-Zerlegungen“	Zerlegungen mit 1	Zerlegungen mit 2
z. B. $8 = 5 + 3$ $7 = 5 + 2$	$8 = 6 + 2$ / $8 = 4 + 4$ $7 = 6 + 1$ / $7 = 4 + 3$	$8 = 1 + 7$ / $7 + 1$ $7 = 1 + 6$ / $6 + 1$	$8 = 2 + 6$ / $6 + 2$ $7 = 2 + 5$ / $5 + 2$

Die einzige so nicht erfasste Zerlegung: $6 = 3 + 3$; ihre Erarbeitung über $3 + 3 = 6$ bietet sich an.

Abbildung 44: Additives Zerlegen⁵⁹

Die Kugelketten können bereits bei der Erarbeitung von Anzahlen sowie bei der Erarbeitung von Zahlbildvorstellungen Anwendung finden. Die Hervorhebung der 5 in

⁵⁸ Vgl. GAIDOSCHIK 2002, S. 78

⁵⁹ GAIDOSCHIK 2002, S. 78

einer Farbe unterstützt das „Fünf und etwas dazu“. Ebenso eignen sich die Ketten für Halbierungsaufgaben.

2.1.7.2 Unterrichtseinheit – Operatives Üben mit den Zahlenzerlegungen

Der Arbeitsauftrag, aus dem dieses Schüldokument hervorgeht, kann folgendermaßen lauten: „In der Zerlegung der 8 stecken viele Aufgaben. Wie viele findest du?“

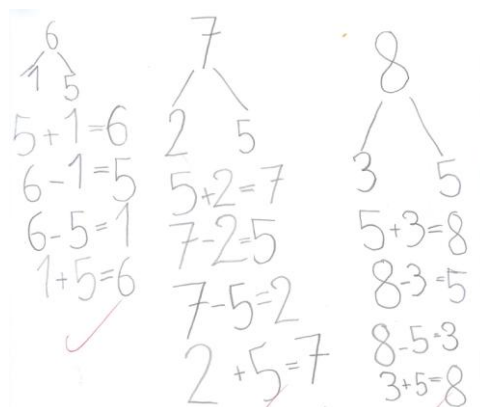


Abbildung 45: Schüldokument - Aufgaben zu Zahlenzerlegungen

2.1.8 Zehnersummen

2.1.8.1 Unterrichtseinheit – Die Zahlen an der Fünf und an der Zehn verankern

GERSTER und SCHULTZ⁶⁰ sprechen für die visuellen Zahldarstellungen am Zehnerfeld, da der große Vorteil darin liegt, dass man die Anzahl der Punkte mit einem Blick erkennt. Ein Zählen ist nicht notwendig. Um die mentalen Vorstellungsbilder zu entwickeln und abzusichern, stellen Gerster und Schultz einige Schüleraktivitäten⁶¹ vor.

1. Zehnerfeld – Blitzblick

Man zeigt der Klasse eine bis drei Sekunden lang Zehnerfeld – Karten und lässt die Kinder sagen, wie viele Punkte sie sehen. Man steigert das Tempo, das macht

⁶⁰ 1998, S. 344

⁶¹ Vgl. GERSTER & SCHULTZ 1998, S. 346

den Kindern Spaß. Als Variante lässt man den Kindern jeweils *eins mehr* nennen als die Zahl der Punkte oder die Zahl der leeren Felder.

2. Fünf und wie viel?

Man zeichnet ein großes leeres Zehnerfeld an die Tafel und ruft eine Zahl zwischen 5 und 10. Wenn die Kinder „acht“ hören, rufen sie im Chor „fünf und drei ist acht“.

3. Übungen am Zehnerfeld

Wichtig bei der Arbeit mit dem Zehnerfeld sind immer die Dialoge mit den Kindern. Nachdem die Kinder einen Blitzblick auf die Zehnerfeldkarte mit der 8 geworfen haben, kann gefragt werden:

- Wie viele Punkte sind auf der Karte?
- Wie viele Felder sind leer?
- Wie viele Punkte sind es, wenn wir einen dazu tun?
- Wie viele Felder fehlen bis 10?

Diese Aktivitäten sind die Grundlage für die weiteren Auseinandersetzungen mit den Zehnersummen.

2.1.8.2 Unterrichtseinheit – Zehnersummen

Die Frage: „Wie viele Felder fehlen bis 10?“ bietet die Grundlage für das Bilden von Zehnersummen. Zehnersummen lassen sich an den noch freien Feldern der jeweiligen Zahldarstellungen gut ablesen. Daher bieten sich die Zahldarstellungskarten als Arbeitsmaterial, um von den gegebenen Punkten auf die Zehn zu ergänzen. Das deutliche Erkennen der Fünf ist dabei eine entscheidende Hilfe.

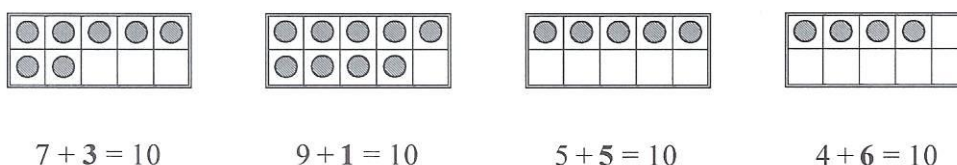


Abbildung 46: Zehnersummen am Zehnerfeld⁶²

⁶² GERSTER & SCHULTZ 1998, S. 367

Die Aufgaben zur Zehnerergänzung füllen die mittlere senkrechte Spalte auf dem Einspluseins-Plan und somit sind alle Aufgaben des kleinen Einspluseins im Zahlenraum 10 im Wesentlichen erfasst. In einem weiteren Kapitel werden verschiedene Möglichkeiten zur Übung und Automatisierung der erarbeiteten Grundaufgaben im Zahlenraum 10 aufgezeigt.

2.2 Möglichkeiten zur Übung und Automatisierung der Aufgaben im Zahlenraum bis 10

2.2.1 Gezieltes „Automatisieren“ mithilfe einer Lernkartei⁶³

Das reine Auswendiglernen der Grundaufgaben im Zahlenraum 10 wird kaum gelingen, wenn die Zahlauffassung nicht stimmt. Daher bringt auch ein „noch mehr Üben“ nicht die Lösung des Problems. Üben und letztlich Automatisieren der Grundaufgaben sind aber notwendig. Erst wenn ein Kind in der Lage ist, Zahlen gegliedert zu denken und vergleichend zu rechnen, kann *sinnvoll* geübt werden. Andernfalls wird nämlich nur das geübt, was das Kind ohnedies schon kann, nämlich das Zählen.

Ein bewährtes Lernmaterial ist die Lernkartei: Nachdem also das Verständnis für das nichtzählende Lösen einer bestimmten „Gruppe“ mit den Kindern erarbeitet wurde, sollten die Zählensätze genau dieser Gruppe auf Lernkarten geschrieben werden. Wenn beispielsweise die „Nachbarzerlegungen der Handzerlegungen“ gelernt werden sollen, dann kommt auf die Vorderseite einer Karte etwa die Fragestellung „ $9 = 6 + ?$ “. Auf der Rückseite wird anstelle der „Lösung“ besser eine passende „Hilfsfrage“ angeboten, also hier „ $9 = 5 + ?$ “.

⁶³ GAIDOSCHIK 2002, S. 81-82

Vorder- und Rückseite einer Lernkarte
für die Automatisierung einer Zerlegung

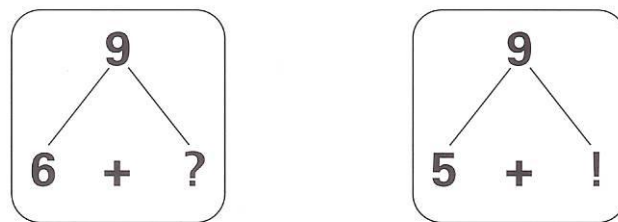


Abbildung 47: Lernkartei⁶⁴

Erst wenn eine Aufgabengruppe auf diese Weise weitgehend beherrscht wird, kann die Kartei sinnvoll um die Aufgaben der nächsten Aufgabengruppe erweitert werden.

GAIDOSCHIK⁶⁵ warnt vor einem ungeordneten „Üben“ im Zahlenraum 10. Wenn dieser Zahlenraum nicht Schritt für Schritt zunächst dem Verständnis nach erarbeitet wurde, dann kann das wahllose (mündliche, schriftliche oder auch computergestützte) „Abfragen“ von beliebigen Rechnungen nur zu *einem* Ergebnis führen: Das Kind wird das Ergebnis zählend ermitteln, wenn es sich nicht anders zu helfen weiß. Dieses Immer-wieder-Zählen führt aber nicht zur Automatisierung.

Die von Gaidoschik beschriebenen Karteikarten eignen sich für das Üben im Klassenverband. Nach jeder Neuerarbeitung wird die nächste Aufgabengruppe angeboten. Die Kinder arbeiten in Partnerarbeit während offener Lerneinheiten oder es findet als „Rechenfrühstück“ für die gesamte Klasse Anwendung. Das „Rechenfrühstück“ kann so verlaufen: Die Lehrerin oder der Lehrer oder ein Schulkind hat eine bestimmte Aufgabengruppe vorbereitet und zeigt eine Karte nach der anderen an die Schülerinnen und Schüler, die im Kreis sitzen. Die Kinder rufen oder zeigen die Lösung so schnell sie können. Dadurch sind neben der Arbeit in der Einzelsituation – im Förderunterricht – auch gezielte Übungsphasen mit allen Kindern der Klasse möglich.

2.2.2 Training der Auswahl von Rechenstrategien

GERSTER und SCHULTZ⁶⁶ verweisen darauf, dass vor der Erarbeitung effizienter Rechenstrategien nicht zu viele Übungsaufgaben gestellt werden dürfen. Erst nachdem

⁶⁴ GAIDOSCHIK 2002, S. 81

⁶⁵ 2002, S. 82

⁶⁶ 1998, S. 375-377

ein gutes Verständnis für Strategien entwickelt worden ist, darf das Rechnen geübt werden, und zwar anhand der neu erarbeiteten Strategien. Durch wiederholten Gebrauch dieser Strategien wird ihre Anwendung leichter, rascher und allmählich automatisiert, so dass sie fast unbewusst angewandt werden. Ganz besonders verweisen sie auf das Training des Strategie-Abrufs und der Strategie-Auswahl. Zur Beherrschung des gesamten Einspluseins genügt es demnach nicht, dass die Kinder nacheinander jede einzelne Rechenstrategie bis zur Automatisierung trainieren. Geübt werden muss auch das Abrufen der verschiedenen Strategien und die Auswahl geeigneter Strategien. Dafür ist es wichtig, dass verschiedene Strategien eigene Namen erhalten und so immer wieder darauf verwiesen werden kann.

2.2.2.1 Übung der Strategie – Auswahl beim kleinen Einspluseins

GERSTER und SCHULTZ⁶⁷ übernehmen für die Übung der Strategieauswahl einen Vorschlag von HOPE (1988). Dafür werden Karten mit den Bezeichnungen für die unterschiedlichen Rechenstrategien vorbereitet und an eine Tafel geheftet. Dazu kommen mehrere Kärtchen mit Rechentermen. Die Kärtchen mit den Rechentermen können aus der Automatisierungskartei genommen werden. Diese Rechenterme sollen nun der jeweils passenden Strategie zugeordnet werden.

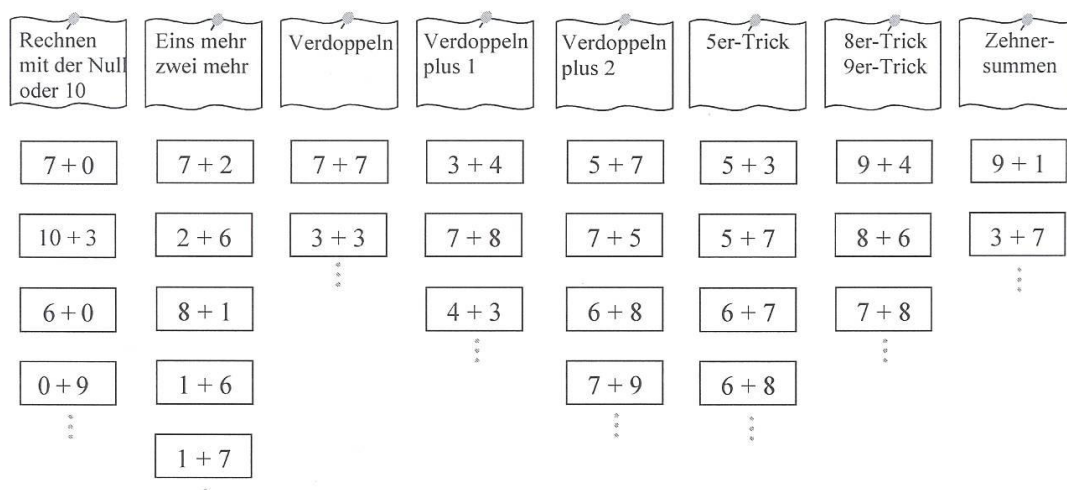


Abbildung 48: Strategieauswahl bei kleinen Einspluseins-Aufgaben⁶⁸

⁶⁷ 1998, S. 376

⁶⁸ GERSTER & SCHULTZ 1998, S. 376

Die Bezeichnungen für die unterschiedlichen Rechenstrategien lassen sich ebenso schrittweise erarbeiten. Werden zunächst einmal Aufgaben aus dem Zahlenraum 10 erarbeitet und automatisiert, so können die Strategien „Verdoppeln plus 2“, sowie „8er – Trick, 9er-Trick“ vorerst einmal außer Acht gelassen werden. Dieses Zuordnungsspiel lässt sich auch mit der gesamten Klasse gut anwenden. Die Kinder diskutieren ihre Zuordnungen und kommen zur Erkenntnis, dass ein Kärtchen zu mehreren Strategien zugeordnet werden kann.

2.2.2.2 Übung der Strategie – Auswahl beim kleinen Einsminuseins

Die Vorgangsweise, die bei der Übung zur Strategie – Auswahl beim kleinen Einpluseins angewendet wird, kann auch auf die Strategien und Aufgaben des kleinen Einsminuseins übertragen werden.

Subtrahiere 0, 1, 2	Unterschied 0, 1, 2	Halbiere	Kraft der Fünf	Subtrahiere 10, 9, 8	Unterschied 10, 9, 8
3 – 0	3 – 3	20 – 10	8 – 5	13 – 10	13 – 3
5 – 1	6 – 5	16 – 8	8 – 3	13 – 9	13 – 4
8 – 2	8 – 8	12 – 6	7 – 5	15 – 8	13 – 5
...	8 – 6	8 – 4	9 – 4	...	...
	12 – 12	...	9 – 5		
	14 – 13		12 – 7		
	...		13 – 8		
			...		

Abbildung 49: Strategieauswahl bei kleinen Einsminuseins-Aufgaben⁶⁹

Auch hier gilt für die Arbeit mit den Aufgaben im Zahlenraum 10, die Strategien „Subtrahiere 10, 9, 8“ und „Unterschied 10, 9, 8“ vorerst einmal wegzulassen.

Wenn die Kinder die Strategien beherrschen und auch den Zusammenhang zwischen Additions- und Subtraktionsaufgaben bewusst wahrnehmen, so steht einer gelungenen Automatisierung der Grundaufgaben im Zahlenraum 10 nichts im Wege.

⁶⁹ GERSTER & SCHULTZ 1998, S. 381

2.2.3 Die Arbeit mit der Einspluseins – Tafel

Die Einspluseins - Tafel stellt den operativen Zusammenhang zwischen den **121 Aufgaben** des „1 + 1“ und nicht zwischen deren Ergebnisse in den Vordergrund⁷⁰. Denn eine Veränderung der Summanden bewirkt automatisch eine Veränderung des Ergebnisses.

2.2.3.1 Unterrichtseinheit – Orientierungsübungen an der Plus -Tafel⁷¹

Diese Unterrichtseinheit veranschaulicht den Aufbau der Einspluseins-Aufgaben innerhalb der Einspluseins-Tafel. In ihren Grundzügen ist sie den Kindern bereits aus den Erarbeitungsphasen bekannt.

1. Was wird für diese Einheit benötigt?

- 1 große Plustafel als Demonstrationsmaterial
- kleine Plus-Tafeln für die Hand der Kinder

2. Wie kann man vorgehen?

- Aufgabenserien werden von den Kindern selber gefunden und genannt.
- Ein einfaches Aufgabenfeld (z.B. rund um eine Verdoppelung) wird entdeckt.
- Welche Aufgaben stehen in den roten Feldern?
- Welche Aufgaben stehen in den grünen Feldern?
- Wo stehen Plusaufgaben mit 1, 2 ... ?
- Welche Aufgaben könnt ihr schon leicht rechnen?
- Wo stehen die Aufgaben mit niedrigem (hohem) Ergebnis?

Die möglichen Arbeitsaufträge können im gemeinsamen Unterricht sowie auch in der Einzelarbeit oder als Hausübungen ausgeführt werden.

2.2.3.2 Unterrichtseinheit – „Päckchen mit Pfiff“⁷²

Die geometrische Unterstruktur der Tafel (Reihen, Spalten, Diagonalen, Ausschnitte, Muster) führt automatisch zu operativen Aufgabenserien.

⁷⁰ Vgl. WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 44

⁷¹ WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 48

⁷² Vgl. WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 46

Die Lösung von Päckchenaufgaben sollte am Zwanzigerfeld durch Umlegen von jeweils wenigen Plättchen möglich sein.

Beispiele:

$6 + 6 =$	$7 + 6 =$	$8 + 6 =$
$6 + 7 =$	$7 + 7 =$	$8 + 7 =$
$6 + 8 =$	$7 + 8 =$	$8 + 8 =$
$6 + 9 =$	$7 + 9 =$	$8 + 9 =$
$10 + 2 =$	$1 + 2 =$	$1 + 1 =$
$9 + 3 =$	$2 + 3 =$	$3 + 2 =$
$8 + 4 =$	$3 + 4 =$	$5 + 3 =$
$7 + 5 =$	$4 + 5 =$	$7 + 4 =$
$6 + 6 =$	$5 + 6 =$	$9 + 5 =$
$5 + 7 =$	$6 + 7 =$	
$4 + 8 =$	$7 + 8 =$	
$3 + 9 =$	$8 + 9 =$	
$2 + 10 =$	$9 + 10 =$	

Abbildung 50: Aufgaben für Päckchen mit Pfiff⁷³

Eine geeignete Vorgangsweise ist, die erste Aufgabe als Ausgangsaufgabe zu verwenden und dann durch aufeinanderfolgendes Umlegen von einem oder mehreren Plättchen die Aufgabenserien zu lösen und anschließend die Ergebnisse zu untersuchen.

2.2.3.3 Unterrichtseinheit – Ungeordnete Aufgabenserien

Nach der Einheit „Arbeit mit Päckchen mit Pfiff“, die geordnete Aufgabenserien darstellen, werden den Kindern ungeordnete Aufgabenserien zum Rechnen angeboten.

Beispiel:

$5 + 3 =$	$5 + 10 =$
$5 + 9 =$	$5 + 4 =$
$5 + 5 =$	$5 + 8 =$
$5 + 7 =$	$5 + 0 =$
$5 + 2 =$	$5 + 6 =$
$5 + 1 =$	

Abbildung 51: Ungeordnete Aufgabenserie⁷⁴

⁷³ WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 46

⁷⁴ WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 49

Nach dem Rechnen werden sie in der Einspluseins-Tafel gesucht und geordnet aufgeschrieben. So entstehen wieder „Päckchen mit Pfiff“.

$$\begin{aligned} 5+0 &= 5 \\ 5+1 &= 6 \\ 5+2 &= 7 \\ 5+3 &= 8 \\ 5+4 &= 9 \end{aligned}$$

Abbildung 52: Geordnete Aufgabenserie⁷⁵

Für weitere Beispiele kann ähnlich vorgegangen werden, wenn Beispiele nach Zeilen, Spalten, Diagonalen und Ausschnitten ungeordnet ausgewählt werden und danach gelöst und geordnet werden⁷⁶.

2.2.3.4 Unterrichtseinheit – Aktivitäten mit Arbeitsblättern

Auf Arbeitsblättern wird ein Aufgabenfeld als Ausschnitt aus der Einspluseins-Tafel vorgegeben. Die Kinder können mit der für sie einfachen Aufgabe beginnen und schrittweise das gesamte Aufgabenfeld erobern. Dies führt zu Entdeckungen wie: Wenn man $8 + 2$ weiß, kann man $7 + 2$ und $8 + 3$ ausrechnen⁷⁷.

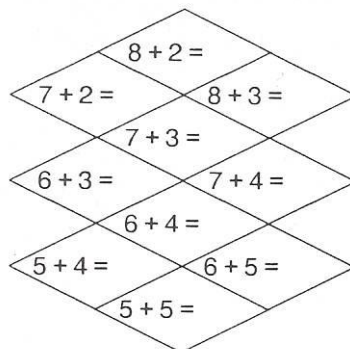


Abbildung 53: Auszug aus der Einspluseins-Tafel⁷⁸

⁷⁵ WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 49

⁷⁶ Vgl. WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 49

⁷⁷ Vgl. WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 50

⁷⁸ WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 50

2.2.3.5 Unterrichtseinheit – Die Einspluseins-Tafel als Aufgabendisplay

Sowohl im mündlichen als auch im schriftlichen Rechnen kann die Einspluseins-Tafel als Aufgabendisplay benutzt werden⁷⁹. Aufgaben werden gesucht und gerechnet. Ergebnisse können genutzt werden, um Nachbaraufgaben zu lösen. Die Kinder können auf ihrer kleinen Einspluseins -Tafel die gut beherrschten Aufgaben ausstreichen. Die noch zu lernenden Aufgaben sind mit ihren Zusammenhängen klar dargestellt. Das wirkt sich wiederum auf das weitere Lernen günstig aus.

2.2.3.6 Unterrichtseinheit – Zahlenzerlegungen zu Zahlen bis 10⁸⁰

In dieser Unterrichtseinheit arbeiten die Kinder zu zweit. Sie haben gemeinsam eine Einspluseins-Tafel vor sich und jedes Kind besitzt einen Stapel gemischter Karten mit den Zahlen 1 bis 10 (je nach Zahlenraum auch 1 bis 20). Die Zahlenkarten liegen verdeckt auf dem Tisch. Ebenso werden einige Wendeplättchen benötigt.

Die Spielanleitung lautet:

- Eine Spielerin oder ein Spieler deckt eine Zahl auf. Die Mitspielerin oder der Mitspieler soll nun zu dieser aufgedeckten Ergebniszahl eine passende Aufgabe finden.
- Auf diese gefundene Aufgabe darf sie oder er nun ein Wendeplättchen ihrer oder seiner Farbe auf die gemeinsame Plustafel legen.
- Nun deckt die andere Spielerin oder der andere Spieler eine Zahlenkarte auf, die Mitspielerin oder der Mitspieler sucht die passende Aufgabe und legt ein Wendeplättchen ihrer oder seiner Farbe auf die gemeinsame Plustafel.
- Sind die Karten beider Kinder aufgedeckt, so liegen in jeder Spalte der Plustafel je ein rotes und ein blaues Plättchen. Denn die senkrechten Aufgabenspalten haben das gleiche Ergebnis.
- Diese Kontrolle zeigt, ob das Zerlegen von Summen in zwei Summanden richtig erfolgte.

Diese Aufgabenfolgen können verschriftlicht und zu operativen Päckchen werden.

⁷⁹ Vgl. WITTMANN & MÜLLER 1994, S. 46

⁸⁰ Vgl. HENGARTNER u.a. 2006, S. 168

2.2.3.7 Unterrichtseinheit – Übungsaufgaben zum Einspluseins erfinden und austauschen⁸¹

Für diese Einheit erhalten die Kinder schwarz – weiße Einspluseins-Tafeln. Die üblichen Farben der Aufgaben sind bei dieser Aufgabenstellung unwesentlich. Die Kinder verwenden später beliebige Farben zur Markierung ihrer gefundenen Rechenwege. Das Übungsformat „Wege“ wird vorerst im Klassenverband eingeführt. Anschließend erstellt dann jedes Kind eigenständig einige Wege auf der Plustafel, indem es nur Aufgaben ohne Ergebnis oder Ergebniszahlen ohne Aufgaben notiert.

Eine mögliche Vorgangsweise ist:

- Der Begriff „Nachbarfeld“ wird noch einmal geklärt. Nachbarfelder berühren sich.
- Die Wege in der Plustafel entstehen von Nachbarfeld zu Nachbarfeld.
- Die erste Aufgabe wird beliebig mithilfe der Plustafel ausgesucht und als eine Additionsaufgabe auf einem Blatt Papier aufgeschrieben. Die Ergebniszahl bleibt offen.
- Dann wird eine Nachbaraufgabe gewählt. Von dieser Nachbaraufgabe wird nur die Ergebniszahl unterhalb der ersten Aufgabe notiert.
- Danach werden zwei weitere Ergebniszahlen, die sich wieder aus Nachbaraufgaben ergeben, angeschrieben.
- Die fünfte Aufgabe ist wieder eine Addition. Sie steht für das Zielfeld.

So könnte ein mögliches Aufgabenblatt aussehen:

① $2 + 2 = \dots$
 $\dots + \dots = 6$
 $\dots + \dots = 8$
 $\dots + \dots = 8$
 $6 + 2 = \dots$

② $1 + 4 = \dots$
 $\dots + \dots = 6$
 $\dots + \dots = 7$
 $\dots + \dots = 8$
 $2 + 6 = \dots$

⑤ $\dots + \dots = \dots$
 $\dots + \dots = \dots$
 $\dots + \dots = \dots$
 $\dots + \dots = \dots$
 $\dots + \dots = \dots$

③ $7 + 2 = \dots$
 $\dots + \dots = 9$
 $\dots + \dots = 9$
 $\dots + \dots = 10$
 $4 + 6 = \dots$

④ $9 + 5 = \dots$
 $\dots + \dots = 13$
 $\dots + \dots = 12$
 $\dots + \dots = 11$
 $6 + 4 = \dots$

⑥ $\dots + \dots = \dots$
 $\dots + \dots = \dots$
 $\dots + \dots = \dots$
 $\dots + \dots = \dots$
 $\dots + \dots = \dots$

Abbildung 54: Wege in der Einspluseinstafel⁸²

⁸¹ Vgl. HENGARTNER u.a. 2006, S. 169

⁸² HENGARTNER u.a. 2006, S. 169

Nach dem Erstellen dieser Aufgabenformate werden diese innerhalb der Klasse getauscht. Jeweils zwei Kinder tauschen ihre selbst erstellten Arbeitsblätter.

- Jedes Kind versucht nun die gesuchten Wege zu finden.
- Die erste Aufgabe wird demnach in der Plustafel gesucht, bemalt und am Arbeitsblatt gelöst.
- Bei der zweiten, dritten und vierten Aufgabe soll zu der vorgegebenen Summe die passende Zerlegung gesucht werden. Es ist dabei darauf zu achten, dass nur Nachbaraufgaben dafür in Frage kommen.
- Wenn eine passende Aufgabe gefunden wurde, wird sie in der Plustafel eingefärbt und die Zerlegung am Blatt eingefügt.
- Die letzte zu lösende Aufgabe ist eine Plusaufgabe. Sie wird in der Plustafel gesucht und ist somit die Zielaufgabe.
- Wenn die Wege richtig eingezeichnet und gefunden wurden, so fügt sich die Zielaufgabe als Nachbaraufgabe in den gefundenen Weg.
- Jeder Weg (er besteht immer aus fünf Aufgaben) erhält eine eigene Farbe.
- Die gefundenen Wege werden mit dem jeweiligen Tauschpartner besprochen.

Diese Unterrichtseinheit gestaltet sich anfänglich für die Kinder etwas schwieriger, ist aber sowohl für leistungsstarke als auch für leistungsschwächere Kinder eine lohnende Aufgabenstellung.

2.2.3.8 Unterrichtseinheit – Rechenfamilien im Einspluseins⁸³

Wenn Kinder Rechnungen zu „Familien“ zusammenfassen, wird ihre Aufmerksamkeit direkt auf die „Verwandtschaften“ zwischen den Rechnungen gelenkt. Sie entdecken Analogien und Gesetzmäßigkeiten, die ihnen das Auswendiglernen der einzelnen Rechensätzchen erleichtern.

Als Einstieg in das Thema „Verwandte Rechnungen“ werden Wege in der Einspluseins – Tafel gezeigt. Zum Beispiel:

- die schrägen Zeilen von links unten bis rechts oben, deren Aufgaben jeweils den 2. Summanden gleich haben
- Spalten mit Tauschaufgaben
- senkrechte Spalten mit Aufgaben, deren Summen gleich bleiben.

⁸³ Vgl. GEERING 2005, S. 12-13

Aufgaben nach diesen Mustern bilden jeweils eine Familie. Alle Mitglieder einer Familie haben eine gemeinsame Eigenschaft – ein Familien-Merkmal. Die Kinder finden Rechenfamilien unter der Bedingung, dass das Familienmerkmal genannt werden kann. Auch Subtraktionsaufgaben dürfen in die Familie einbezogen werden.

$1+0=1$ $1+1=2$ $5+1=6$ $7+0=7$
 $2+0=2$ $2+2=4$ $5+2=7$ $7+1=8$
 $3+0=3$ $3+3=6$ $5+3=8$ $7+2=9$
 $4+0=4$ $4+4=8$ $5+4=9$ $7+3=10$
 $5+0=5$ $5+5=10$ $4+5=9$ $7+4=11$
 $6+0=6$ $6+6=12$ $3+5=8$ $7+5=12$
 $7+0=7$ $7+7=14$ $2+5=7$ $7+6=13$
 $8+0=8$ $8+8=16$ $1+5=6$ $7+7=14$
 $9+0=9$ $9+9=18$ $10+10=20$ $7+8=15$
 $7+9=16$
 Familie blus Siben
 Nul plus Familie blus Famf
 Familie dobelld Familie

Abbildung 55: Schölerdokument zu Rechenfamilien

Diese Unterrichtseinheit zum Thema „Arbeit mit der Einspluseins-Tafel“ bildet den Abschluss aller behandelten zentralen Themen. Es lassen sich bei entsprechender Vertiefung die Themen der einzelnen Unterkapitel in weitere Einheiten gliedern. Die ausgearbeiteten Themeneinheiten verweisen auf ein mögliches Vorgehen sowie auf Arbeitsmaterialien, die auch im Anhang zu finden sind. Ebenso machen sie durch die Literaturhinweise auf eine weitere didaktische Aufbereitung aufmerksam.

3. Schlussbemerkung

Die Erarbeitung der verschiedenen Themeneinheiten muss in der konkreten Umsetzung neben dem mathematisch-fachdidaktischen Hintergrund auch den Umgang mit dem Fehler berücksichtigen. Besonders im Mathematikunterricht herrscht vorwiegend ein ergebnisorientiertes Leistungsverständnis vor. Immer wieder werden richtig gelöste Aufgaben gezählt und den nicht richtig gelösten Aufgaben gegenübergestellt. Vielmehr sollte es jedoch darum gehen, Aufschlüsse über das Lernverhalten und die Lernfortschritte der Kinder in der Auseinandersetzung mit den Fehlern und Schwierigkeiten der Kinder über Gespräche oder durch „lautes Denkenlassen“ zu

erhalten⁸⁴. RADATZ u.a.⁸⁵ halten dazu ganz klar fest: „Die Diskussion (und auch die Bewertung) der Lern- und Lösungswege ist wichtiger als das Sammeln (und Bewerten) von Ergebnissen bzw. Aufgabenlösungen.“

Fehler gehören zum Lernen, sind Lernspuren, die der Lehrerin oder dem Lehrer zeigen können, wie die Kinder denken. Die Kinder müssen lernen und erleben, dass Fehler zum Lernen gehören und dass es selbstverständlich ist, Fehler zu machen⁸⁶. *„Nur so können die Kinder erkennen, dass Einsicht in Vorgänge zu haben wichtiger ist als das Streben, Fehler zu vermeiden.“*⁸⁷

FORTHAUS⁸⁸ ist ebenso Fehlern auf der Spur und stellt fest, dass in einem fehlerorientierten System die Fehler als Defizite gedeutet werden. Demnach orientiert sich der Unterricht am Prinzip der kleinsten Schritte und alle Strategien sind auf das Vermeiden von Fehlern ausgerichtet.

WIELPÜLTZ⁸⁹ sieht den Fehler unter dem Blickpunkt der Diagnostik und hält fest: „Für alle diagnostischen Bemühungen braucht die Lehrerin Einfühlung, Geduld, Zeit und Fantasie. Für eine differenzierte Unterrichtsgestaltung ist das Aufspüren der kindlichen Denk- und Rechenwege jedoch unerlässlich, denn erst muss man die Kinder verstehen, bevor man von den Kindern verstanden werden kann.“ Folgt man den Aussagen von WIELPÜLTZ, so ist es unerlässlich, eigene Lösungswege und Ergebnisse aufzuschreiben und so eine andere Beziehung zum Lernen zu schaffen. Sehr geeignet dafür ist ein großes unliniertes Heft, das als Rechentagebuch oder Lerntagebuch verwendet wird. Als Dokumentationen eignen sich Zeichnungen und Skizzen, die in Rechenkonferenzen zum Aufspüren und Besprechen von Rechen- und Lernwegen dienen. In der Diskussion und Kooperation lernen die Kinder voneinander und miteinander.

Abschließend ist zu sagen, dass die im Zahlenraum zehn bzw. zwanzig zu erwerbenden Strategien und die Automatisierung dieser Grundaufgaben neben anderen Bereichen die

⁸⁴ Vgl. RADATZ u.a. 1998, S. 8

⁸⁵ 1998, S. 8

⁸⁶ Vgl. BOBROWSKI & GRASSMANN 2003, S. 8

⁸⁷ BOBROWSKI & GRASSMANN 2003, S. 8

⁸⁸ 2003, S. 9

⁸⁹ 1998, S. 10

Grundlage für die Bewältigung von Aufgaben in höheren Zahlenräumen sind und diesen Aufgaben besondere Bedeutung zukommen *muss*.

4. Literaturverzeichnis

BOBROWSKI, Susanne, GRASSMANN, Marianne (2003): Vom Umgang mit Fehlern im Unterricht. *Grundschule, Heft 3*, S. 8

FORTHAUS, Reinhard (2003): Fehlern auf der Spur. *Grundschule, Heft 3*. S. 9–13

GAIDOSCHIK, Michael (2002): *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern*. Wien: öbv&hpt

GAIDOSCHIK, Michael (2005): *Vom Zählen zum Rechnen. Skriptum für den Lehrgang LernberaterIn Mathematik*. Wien

GEERING, Peter (2005): Rechenfamilien im Einspluseins. *Grundschule Mathematik, Nr. 7*, S. 12-13.

GERSTER, Hans – Dieter, SCHULTZ, Rita (1998): *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. Freiburg im Breisgau. URL: <http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397/> [28.4.2012]

HENGARTNER, Elmar, HIRT, Ueli, WÄLTI, Beat, PRIMARSCHULTEAM Lupsingen (2006): *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Klett und Balmer

JANSEN, Peter (2005): Bausteine individuellen und kompetenzorientierten Übens. *Praxis Grundschule, Heft 3*, S. 18-23

LEHRPLAN DER VOLKSSCHULE 2005: Verordnung der Bundesministerin für Unterricht, Kunst und Kultur, mit welcher Lehrpläne der Volksschule und der Sonderschulen erlassen werden; BGBl. II Nr. 290/2008. URL: http://www.bmukk.gv.at/medienpool/14055/lp_vs_gesamt.pdf [28.4.2012]

NIENHUIS Montessori, *Material – Katalog*, Firma Schul - Wolf, 5202 Neumarkt am Wallersee.

SCHÜTTE, Sybille (Hrsg.), ARENDS, Michael, BUGRAM, Ursula, HAHN, Christine, HALLER, Waltraud, RUCKERBAUER, Jutta, (2006): *Die Matheprofis 1.* (Ein Mathematikbuch für das 1. Schuljahr). Linz: Veritas

STEINER, Gerald F. (2001): *Rechenigel, Band 1, Mathematik für die 1. Schulstufe, Erarbeitungsteil.* Wien: Reniets

WIELPÜLTZ, Hans (1998): Erst verstehen, dann verstanden werden. *Grundschule, Heft 3*, S. 9–11

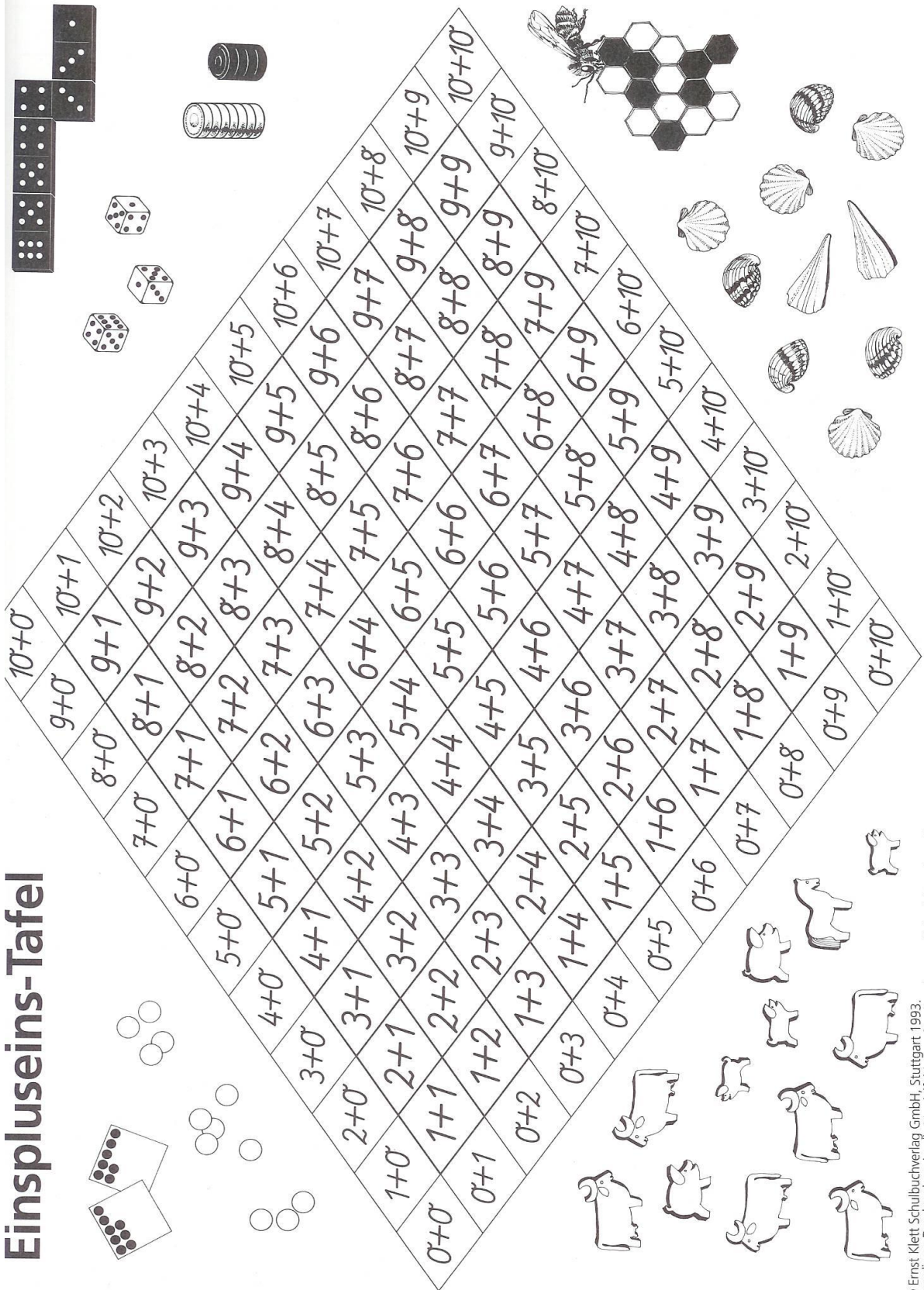
WITTMANN, Erich Ch., MÜLLER, Gerhard N. (1994): *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1.* Stuttgart; Düsseldorf; Berlin; Leipzig: Klett – Schulbuchverlag

Anhang

Kopiervorlage „Einspluseins-Tafel“, Wittmann/Müller, 1994

Einspluseins-Tafel

1/7 Zum Thema Seite 43–51



10+0	9+0	8+0	7+0	6+0	5+0	4+0	3+0	2+0	1+0	0+0
10+1	9+1	8+1	7+1	6+1	5+1	4+1	3+1	2+1	1+1	0+1
10+2	9+2	8+2	7+2	6+2	5+2	4+2	3+2	2+2	1+2	0+2
10+3	9+3	8+3	7+3	6+3	5+3	4+3	3+3	2+3	1+3	0+3
10+4	9+4	8+4	7+4	6+4	5+4	4+4	3+4	2+4	1+4	0+4
10+5	9+5	8+5	7+5	6+5	5+5	4+5	3+5	2+5	1+5	0+5
10+6	9+6	8+6	7+6	6+6	5+6	4+6	3+6	2+6	1+6	0+6
10+7	9+7	8+7	7+7	6+7	5+7	4+7	3+7	2+7	1+7	0+7
10+8	9+8	8+8	7+8	6+8	5+8	4+8	3+8	2+8	1+8	0+8
10+9	9+9	8+9	7+9	6+9	5+9	4+9	3+9	2+9	1+9	0+9
10+10	9+10	8+10	7+10	6+10	5+10	4+10	3+10	2+10	1+10	0+10

Plus im ZR 10

ZR 10: 1 dazu

$3 + 1 = \underline{\quad}$

$7 + 1 = \underline{\quad}$

$9 + 1 = \underline{\quad}$

$4 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 1 = \underline{\quad}$

$6 + 1 = \underline{\quad}$

$2 + 1 = \underline{\quad}$

$5 + 1 = \underline{\quad}$

$8 + 1 = \underline{\quad}$

$0 + 1 = \underline{\quad}$

ZR 10: 1 dazu mit Tauschaufgaben

$4 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 4 = \underline{\quad}$

$6 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 6 = \underline{\quad}$

$8 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 8 = \underline{\quad}$

$9 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 9 = \underline{\quad}$

$3 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 3 = \underline{\quad}$

$2 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 2 = \underline{\quad}$

$5 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 5 = \underline{\quad}$

$7 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 7 = \underline{\quad}$

Rechne aus: Suche den einfacheren Rechenweg!

$8 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 5 = \underline{\quad}$

$7 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 6 = \underline{\quad}$

$3 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 4 = \underline{\quad}$

Plus im ZR 10

ZR 10: 1 dazu → 2 dazu

$5 + 1 = \underline{\quad}$

$5 + 2 = \underline{\quad}$

$6 + 1 = \underline{\quad}$

$6 + 2 = \underline{\quad}$

$8 + 1 = \underline{\quad}$

$8 + 2 = \underline{\quad}$

$4 + 1 = \underline{\quad}$

$4 + 2 = \underline{\quad}$

$3 + 1 = \underline{\quad}$

$3 + 2 = \underline{\quad}$

$2 + 1 = \underline{\quad}$

$2 + 2 = \underline{\quad}$

$7 + 1 = \underline{\quad}$

$7 + 2 = \underline{\quad}$

$1 + 1 = \underline{\quad}$

$1 + 2 = \underline{\quad}$

ZR 10: 2 dazu mit Tauschaufgaben

$4 + 2 = \underline{\quad}$

$2 + 4 = \underline{\quad}$

$3 + 2 = \underline{\quad}$

$2 + 3 = \underline{\quad}$

$6 + 2 = \underline{\quad}$

$2 + 6 = \underline{\quad}$

$7 + 2 = \underline{\quad}$

$2 + 7 = \underline{\quad}$

$5 + 2 = \underline{\quad}$

$2 + 5 = \underline{\quad}$

$8 + 2 = \underline{\quad}$

$2 + 8 = \underline{\quad}$

Minus im ZR 10

ZR 10: 1 weg

$3 - 1 = \underline{\quad}$

$2 - 1 = \underline{\quad}$

$5 - 1 = \underline{\quad}$

$4 - 1 = \underline{\quad}$

$8 - 1 = \underline{\quad}$

$7 - 1 = \underline{\quad}$

$6 - 1 = \underline{\quad}$

$9 - 1 = \underline{\quad}$

$1 - 1 = \underline{\quad}$

$10 - 1 = \underline{\quad}$

ZR 10: 1 weg → 2 weg

$4 - 1 = \underline{\quad}$

$3 - 1 = \underline{\quad}$

$4 - 2 = \underline{\quad}$

$3 - 2 = \underline{\quad}$

$6 - 1 = \underline{\quad}$

$5 - 1 = \underline{\quad}$

$6 - 2 = \underline{\quad}$

$5 - 2 = \underline{\quad}$

$8 - 1 = \underline{\quad}$

$2 - 1 = \underline{\quad}$

$8 - 2 = \underline{\quad}$

$2 - 2 = \underline{\quad}$

$7 - 1 = \underline{\quad}$

$9 - 1 = \underline{\quad}$

$7 - 2 = \underline{\quad}$

$9 - 2 = \underline{\quad}$

Rechne aus:

$3 - 2 = \underline{\quad}$

$6 - 2 = \underline{\quad}$

$9 - 1 = \underline{\quad}$

$5 - 1 = \underline{\quad}$

$7 - 2 = \underline{\quad}$

$8 - 1 = \underline{\quad}$

$8 - 2 = \underline{\quad}$

$3 - 1 = \underline{\quad}$

Plus im ZR 10

ZR 10: +0

$1 + 0 = \underline{\quad}$

$2 + 0 = \underline{\quad}$

$3 + 0 = \underline{\quad}$

$4 + 0 = \underline{\quad}$

$5 + 0 = \underline{\quad}$

$6 + 0 = \underline{\quad}$

$7 + 0 = \underline{\quad}$

$8 + 0 = \underline{\quad}$

$9 + 0 = \underline{\quad}$

$10 + 0 = \underline{\quad}$

 $0 + 1 = \underline{\quad}$

$0 + 2 = \underline{\quad}$

$0 + 3 = \underline{\quad}$

$0 + 4 = \underline{\quad}$

$0 + 5 = \underline{\quad}$

$0 + 6 = \underline{\quad}$

$0 + 7 = \underline{\quad}$

$0 + 8 = \underline{\quad}$

$0 + 9 = \underline{\quad}$

$0 + 10 = \underline{\quad}$

 $0 + 4 = \underline{\quad}$

$0 + 3 = \underline{\quad}$

$3 + 0 = \underline{\quad}$

$0 + 2 = \underline{\quad}$

$5 + 0 = \underline{\quad}$

$0 + 9 = \underline{\quad}$

$0 + 8 = \underline{\quad}$

$8 + 0 = \underline{\quad}$

$0 + 7 = \underline{\quad}$

$10 + 0 = \underline{\quad}$

Plus im ZR 10

ZR 10: Pärchen (Verdoppeln)

$$\begin{array}{l} 1 + 1 = \underline{\quad} \\ 2 + 2 = \underline{\quad} \\ 3 + 3 = \underline{\quad} \\ 4 + 4 = \underline{\quad} \\ 5 + 5 = \underline{\quad} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 + 3 = \underline{\quad} \\ 1 + 1 = \underline{\quad} \\ 5 + 5 = \underline{\quad} \\ 2 + 2 = \underline{\quad} \\ 4 + 4 = \underline{\quad} \end{array}$$

Plus im ZR 10

ZR 10: Pärchen (Verdoppeln)

$$\begin{array}{l} 1 + 1 = \underline{\quad} \\ 2 + 2 = \underline{\quad} \\ 3 + 3 = \underline{\quad} \\ 4 + 4 = \underline{\quad} \\ 5 + 5 = \underline{\quad} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 + 3 = \underline{\quad} \\ 1 + 1 = \underline{\quad} \\ 5 + 5 = \underline{\quad} \\ 2 + 2 = \underline{\quad} \\ 4 + 4 = \underline{\quad} \end{array}$$

Minus im ZR 10

ZR 10: Hand weg

$6 - 5 =$

$9 - 5 =$

$6 - 5 =$

$7 - 5 =$

$6 - 5 =$

$5 - 5 =$

$8 - 5 =$

$5 - 5 =$

$9 - 5 =$

$9 - 5 =$

$7 - 5 =$

$7 - 5 =$

$10 - 5 =$

$8 - 5 =$

$10 - 5 =$

Minus im ZR 10

ZR 10: Hand weg

$6 - 5 =$

$9 - 5 =$

$6 - 5 =$

$7 - 5 =$

$6 - 5 =$

$5 - 5 =$

$8 - 5 =$

$5 - 5 =$

$9 - 5 =$

$9 - 5 =$

$7 - 5 =$

$7 - 5 =$

$10 - 5 =$

$8 - 5 =$

$10 - 5 =$

Minus im ZR 10

ZR 10: Hand weg

$6 - 1 =$

$9 - 4 =$

$6 - 1 =$

$7 - 2 =$

$6 - 1 =$

$5 - 5 =$

$8 - 3 =$

$5 - 5 =$

$9 - 4 =$

$9 - 4 =$

$7 - 2 =$

$7 - 2 =$

$10 - 5 =$

$8 - 3 =$

$10 - 5 =$

Minus im ZR 10

ZR 10: Hand weg

$6 - 1 =$

$9 - 4 =$

$6 - 1 =$

$7 - 2 =$

$6 - 1 =$

$5 - 5 =$

$8 - 3 =$

$5 - 5 =$

$9 - 4 =$

$9 - 4 =$

$7 - 2 =$

$7 - 2 =$

$10 - 5 =$

$8 - 3 =$

$10 - 5 =$